



## Online Portfolio Selection Based on Follow-the-Loser Algorithms

### Javad Validi

Msc., Department of Financial Engineering, Faculty of Industrial Engineering, K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran. E-mail: validijavad@email.kntu.ac.ir

### Amir Abbas Najafi

\*Corresponding Author, Associate Prof., Financial Engineering, Faculty of Industrial Engineering, K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran. E-mail: aanajafi@kntu.ac.ir

### Alireza Validi

Msc., Department of Financial Engineering, Faculty of Financial Sciences, Kharazmi University, Tehran, Iran. E-mail: alireza.validi1991@gmail.com

### Abstract

**Objective:** Nowadays, the volume and speed of transactions in financial markets have grown dramatically and it is hard to track market changes by using traditional methods. Besides the efficiency of traditional methods, the low speed of these approaches is one of the most important deficiencies of them because they cannot adapt to high speed of transactions. To overcome this shortcoming, algorithmic trading techniques have been proposed which online portfolio selection is one of the most important of these techniques. So, the purpose of this research is to propose a new algorithm for online portfolio selection which leads to high risk-adjusted return and speeds up the process of portfolio selection.

**Methods:** In this research, two algorithms have been proposed using multi-period mean reversion which is the basis of follow-the-loser algorithms. In these algorithms, a set of various experts predict the price relative vector of next period. Then, one of existing algorithms in prediction theory with expert advice is used to assign weights to experts. Then, a learning technique is used for portfolio optimization which leads to portfolio of next period.

**Results:** The results show the superiority of the proposed algorithms to other algorithms existing in literature based on return and risk-adjusted return criteria.

**Conclusion:** The concept of mean reversion can be better expressed by using multi-period mean reversion. In addition, using different experts' advices make predictions more accurate and therefore better portfolios are suggested. Also, the use of weighting system indirectly brings robustness in the algorithms because it reduces the weights assigned to experts with poor predictions and transforms it to other experts with proper predictions.

**Keywords:** Online portfolio selection, Mean reversion principle, Expert advice, Follow-the-Loser algorithm.

**Citation:** Validi, J., Najafi, A.A., & Validi, A. (2020). Online Portfolio Selection Based on Follow-the-Loser Algorithms. *Financial Research Journal*, 22(3), 408-427. (in Persian)

-----  
Financial Research Journal, 2020, Vol. 22, No.3, pp. 408-427

DOI: 10.22059/frj.2020.291101.1006941

Received: October 21, 2019; Accepted: June 07, 2020

© Faculty of Management, University of Tehran

## انتخاب بر خط سبب سرمایه‌گذاری به کمک الگوریتم‌های تبعیت از بازنده

### جواد ولیدی

کارشناس ارشد، گروه مهندسی مالی، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران. رایانامه: validijavad@email.kntu.ac.ir

### امیرعباس نجفی

\* نویسنده مسئول، دانشیار، گروه مهندسی مالی، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران. رایانامه: aanajafi@kntu.ac.ir

### علیرضا ولیدی

کارشناس ارشد، گروه مهندسی مالی، دانشکده علوم مالی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران. رایانامه: alireza.validi1991@gmail.com

## چکیده

**هدف:** امروزه در بازارهای مالی، حجم و سرعت معاملات افزایش چشمگیری یافته است و با تحلیل‌های سنتی، به‌سختی می‌توان هم‌گام با تغییرات بازار پیش رفت. در کنار کارایی روش‌های سنتی، سرعت کم این رویکردها را می‌توان مهم‌ترین کاستی آنها دانست؛ چرا که نمی‌توانند سرعت در معامله را برآورده کنند. برای رفع این کاستی، تکنیک‌های دادوستد الگوریتمی ارائه شده‌اند که در این میان، انتخاب برخط سبب سرمایه‌گذاری، بسیار با اهمیت است. هدف این پژوهش، ارائه الگوریتمی برای انتخاب سبب سرمایه‌گذاری است که به کسب بیشترین بازدهی تعدیل‌شده به ریسک منجر شود و سرعت را در انتخاب سبب سرمایه‌گذاری افزایش دهد.

**روش:** در پژوهش پیش رو، الگوریتمی ارائه شده است که از اصل بازگشت به میانگین چند دوره‌ای که مبنای الگوریتم‌های تبعیت از بازنده است، استفاده می‌کند. در این الگوریتم، خبرگان (خبیره) مختلف، بردار نسبت قیمتی دوره آتی را پیش‌بینی می‌کنند، سپس، به کمک یکی از الگوریتم‌های نظریه پیش‌بینی با نظر خبرگان، وزن‌های تخصیصی به هریک از خبرگان تعیین می‌شود. سپس از یک تکنیک یادگیری برای بهینه‌سازی پرتفو استفاده می‌شود تا پرتفو دوره آتی مشخص شود.

**یافته‌ها:** بر اساس یافته‌ها، الگوریتم‌های ارائه‌شده، در مقایسه با سایر الگوریتم‌های موجود در ادبیات، بر اساس سنج‌های بازدهی و بازدهی تعدیل‌شده به ریسک عملکرد برتری دارند.

**نتیجه‌گیری:** استفاده از بازگشت به میانگین چند دوره‌ای، بهتر می‌تواند مفهوم بازگشت به میانگین را منعکس کند. علاوه بر این، بهره‌مندی از خبرگان مختلف، دقت پیش‌بینی‌ها را افزایش داده و در نتیجه پرتفوهای بهتری پیشنهاد می‌شود. از سوی دیگر، بهره‌گیری از سیستم وزن‌دهی خبرگان، سبب استوار شدن مدل می‌شود؛ زیرا از وزن خبرگان با پیش‌بینی‌های ضعیف می‌کاهد و در مقابل، به وزن سایر خبرگان می‌افزاید.

**کلیدواژه‌ها:** انتخاب برخط سبب سرمایه‌گذاری، اصل بازگشت به میانگین، نظر خبرگان، الگوریتم تبعیت از بازنده.

**استناد:** ولیدی، جواد؛ نجفی، امیرعباس؛ ولیدی، علیرضا (۱۳۹۹). انتخاب برخط سبب سرمایه‌گذاری به کمک الگوریتم‌های تبعیت از بازنده. *تحقیقات مالی*، ۳(۳)، ۴۰۸-۴۲۷.

تحقیقات مالی، ۱۳۹۹، دوره ۲۲، شماره ۳، صص. ۴۰۸-۴۲۷

DOI: 10.22059/frj.2020.291101.1006941

دریافت: ۱۳۹۸/۰۷/۲۹، پذیرش: ۱۳۹۹/۰۳/۱۸

© دانشکده مدیریت دانشگاه تهران

## مقدمه

مسئله انتخاب سبد، مسئله‌ای است که در آن سرمایه‌گذار تلاش می‌کند تا مقدار معینی از ثروت خود را در افق زمانی مشخصی سرمایه‌گذاری کند. در حل مسئله انتخاب سبد، سرمایه‌گذار تصمیم می‌گیرد که به چه صورت ثروت خود را بین دارایی‌های موجود برای سرمایه‌گذاری تخصیص دهد. نخستین بار، هری مارکوویتز، در سال ۱۹۵۲ این مسئله را مطرح کرد و رویکرد وی، اساس نظریه مدرن پرتفو شناخته شد. در بازارهای مالی، سرمایه‌گذاران عمدتاً فرصت‌های سرمایه‌گذاری را از طریق تحلیل‌های تکنیکی و بنیادی و با استفاده از ابزارهای متنوع تجزیه و تحلیل می‌کنند. در کنار کارایی این دو روش تحلیلی، سرعت کم این رویکردها به دلیل محاسبات دستی، مهم‌ترین کاستی‌های آنها محسوب می‌شود؛ زیرا این رویکردها نمی‌توانند سرعت در معامله را که از نیازهای بسیار مهم سرمایه‌گذاران در بازارهای مالی امروزی است، برآورده کنند. علاوه بر این، در این دو روش، احتمال خطاهای رفتاری انسان بسیار زیاد است. به دلیل طبیعت انسانی، بسیاری از استراتژی‌های معمول با این مسئله مشکل دارند و در مواقعی که طمع و ترس به عنوان عنصر خارجی وارد می‌شود، تصمیم‌های غیربهبینه‌ای را اتخاذ می‌کنند. بنابراین، بهتر است برای جلوگیری از این نوع خطاها در معاملات، از استراتژی‌های دیگری استفاده شود تا نقش این نوع خطا کاهش یافته یا به صفر برسد. یکی دیگر از دغدغه‌های اخیر که صنعت سرمایه‌گذاری با آن روبه‌رو شده است، افزایش تعداد ابزارهای مالی است. از یک‌سو، طی دهه گذشته، به سبب نوآوری‌های مالی، ابزارهای مالی مختلفی به وجود آمده است (مانند معاوضه روی نرخ‌های بهره یا معاوضه روی اعتبارات یا اختیار معاملات) و از سوی دیگر، با توسعه اقتصاد جهانی، هزاران شرکت و ابزارهای تجاری در بورس‌های مختلف ایجاد شده‌اند که «داده‌های بزرگ» تولیدشده توسط این ابزارها و شرکت‌ها، فرایند پردازش و تحلیل را برای سرمایه‌گذاران سخت کرده است.

با توجه به توضیحات فوق، وجود دغدغه‌هایی از جمله سرعت کم استراتژی‌های معاملاتی فعلی، خطاهای رفتاری انسان در انجام معاملات، تنوع ابزارهای مالی و...، ضرورت تکنیک‌های دادوستد الگوریتمی، از جمله انتخاب برخط سبد سرمایه‌گذاری<sup>۱</sup> را مشخص می‌سازد که می‌توان با استفاده از این الگوریتم‌ها تا حد زیادی بر مشکلات بیان شده فائق آمد. این الگوریتم‌ها، علاوه بر سرعت زیاد، قادرند که حجم زیادی از داده‌ها را در مدت زمان کوتاه پردازش کنند. در انتخاب برخط سبد سهام، سرمایه‌گذار زیرمجموعه‌ای از سهام شرکت‌های مختلفی را مشخص می‌کند که قرار است سرمایه‌گذاری در آنها انجام شود، سپس الگوریتم به صورت خودکار و بدون دخالت سرمایه‌گذار، سبد سرمایه‌گذاری وی را در هر دوره و با هدف بیشینه‌سازی ثروت، در انتهای افق زمانی تشکیل می‌دهد. انتخاب برخط سبد سهام، در گستره‌ای از کاربردهای مالی نظیر مدیریت خودکار سرمایه، مدیریت صندوق‌های پوشش ریسک و... نقش اساسی ایفا می‌کند. در انتخاب برخط سبد سهام، سرمایه‌گذار تلاش می‌کند که به منظور بیشینه‌سازی ثروت خود، به خودکارسازی فرایند انتخاب سبد یا تخصیص سرمایه بین دارایی‌ها در بلندمدت اقدام کند.

اغلب الگوریتم‌های ارائه‌شده در ادبیات موضوع، از اصل بازگشت به میانگین تک‌دوره‌ای پیروی می‌کنند که در صورت وجود نوسان‌های شدید در بازار، این مسئله به راه‌حل‌های اشتباه در حل مسئله بهینه‌سازی سبد منتهی می‌شود و پرتفو را در جهت اشتباه به‌روزرسانی می‌کند. علاوه بر این، در تعدادی از الگوریتم‌ها که بازگشت به میانگین را به‌صورت چند دوره‌ای منعکس کرده‌اند، وزن‌های یکسانی به هر یک از دوره‌های گذشته برای پیش‌بینی نسبت قیمتی دوره آتی و در نتیجه، حل مسئله بهینه‌سازی تخصیص یافته است که به نتایج اشتباه منجر می‌شود. همچنین، در سایر الگوریتم‌هایی که در این دسته جای می‌گیرند، از وزن‌های ثابت برای پیش‌بینی بردار نسبت قیمتی دوره آتی استفاده شده است که نتایج دقیقی را به‌دنبال ندارد. از این رو، در پژوهش حاضر دو الگوریتم برای تشکیل سبد برخط ارائه شده است که از خبرگان مختلف در تشکیل سبد بهره می‌برد. استفاده از پرتفویهای پیشنهادی خبرگان مختلف، می‌تواند عملکرد انتخاب سبد را بهبود دهد. همچنین، در ساختار این دو الگوریتم، از الگوریتمی برای به‌روزرسانی وزن‌های هر یک از خبره‌ها در هر دوره زمانی و متناسب با عملکرد گذشته‌شان استفاده شده است. مزیت اصلی این دو الگوریتم نسبت به سایر الگوریتم‌های موجود در ادبیات موضوع، علاوه بر بهره‌گیری از بازگشت به میانگین چند دوره‌ای، این است که وزن‌های هر یک از خبرگان که پرتفویی را پیشنهاد می‌کنند، در هر دوره کاملاً پویاست و این خاصیت سبب می‌شود پرتفوی پیشنهادی هر خبره‌ای که خطای تجمعی بیشتری تا آن دوره دارد، وزن کمتری در تشکیل پرتفوی نهایی دوره آتی داشته باشد. بدیهی است که این پروسه به‌طور کامل خودکار انجام می‌شود و خطای انسانی نیز در پروسه انتخاب سبد جایی ندارد. در واقع، استفاده از پیشنهادیهای خبرگان در کنار مفهوم بازگشت به میانگین، این دو الگوریتم را در دسته پنجمی از الگوریتم‌های انتخاب برخط سبد جای می‌دهد که از قابلیت‌های هر دو دسته الگوریتم‌های فرایادگیری و الگوریتم‌های تبعیت از بازنده استفاده می‌کند.

در ادامه، ابتدا پیشینه پژوهش‌های صورت‌گرفته در زمینه الگوریتم‌های انتخاب برخط سبد مرور شده و این الگوریتم‌ها در چهار دسته طبقه‌بندی می‌شوند. در بخش روش‌شناسی پژوهش، مسئله انتخاب برخط سبد فرمول‌بندی شده و مفاهیم و روش‌های به‌کار گرفته‌شده در دو الگوریتم پیشنهادی تشریح می‌شود. در بخش بعد، علاوه بر تشریح داده‌های مورد استفاده در پژوهش، یافته‌های پژوهش در قالب جداول و اشکال نمایش داده می‌شود و در انتها نیز، ضمن بیان نتایج پژوهش، پیشنهادهایی برای پژوهش‌های آتی ارائه خواهد شد.

### پیشینه پژوهش

الگوریتم‌های ارائه‌شده در زمینه انتخاب برخط سبد سرمایه‌گذاری، از سه اصل کلی پیروی می‌کنند و بر مبنای این اصول، الگوهایی را برای به‌روزرسانی پرتفو ارائه می‌دهند. این سه اصل عبارت‌اند از: اصل مومنتوم<sup>۱</sup> (پیروی از روند)، اصل بازگشت به میانگین<sup>۲</sup> و اصل تطابق با الگو<sup>۳</sup>.

یکی از ایده‌های معامله‌گری معروف در دنیای مالی، مومنتوم است که فرض می‌کند سهم‌های دارای عملکرد بهتر در گذشته، می‌توانند در آینده نیز عملکرد بهتری از خود برجای بگذارند. مطابق با این اصل، وزن از سهم‌های با عملکرد بدتر، به سمت سهم‌های با عملکرد بهتر سوق داده می‌شود. مومنتوم مهم‌ترین اصل در پژوهش‌های انتخاب برخط سبب سرمایه‌گذاری است و الگوریتم‌هایی که از این اصل پیروی می‌کنند، با عنوان الگوریتم‌های تبعیت از برنده شناخته می‌شوند. کاور<sup>۱</sup> (۱۹۹۱) اولین بار الگوریتم پرتفوی یونیورسال را ارائه کرد که در آن، ثروت به خیره‌هایی تخصیص داده می‌شود که از استراتژی متوازن‌سازی ثابت پرتفو استفاده می‌کنند. کاور و اوردنتلیج<sup>۲</sup> (۱۹۹۶) این الگوریتم را به پرتفوی یونیورسال موزون به  $\mu$  بهبود دادند که در آن،  $\mu$  به توزیع داده‌شده روی فضای پرتفو اشاره می‌کند. کاور و اوردنتلیج (۱۹۹۶) اطلاعات جانبی، مانند عوامل بنیادین را وارد مدل کردند و در سال ۱۹۹۸، فروش استقرایی و خرید اعتباری را به مدل قبلی افزودند. بلوم و کالای<sup>۳</sup> (۱۹۹۹) مدل را با هزینه معاملاتی ارتقا دادند. کراس و بارون<sup>۴</sup> (۲۰۰۳) و آکوگلو، دریناس و کائو<sup>۵</sup> (۲۰۰۵)، حالت تعمیم‌یافته‌ای از الگوریتم اولیه را ارائه دادند، به این صورت که هر خیره می‌تواند استراتژی‌های گوناگونی را به کار ببرد و لزومی ندارد از استراتژی متوازن‌سازی ثابت پرتفو استفاده کند. گایورونسکی و استلا<sup>۶</sup> (۲۰۰۰) الگوریتم متوازن‌سازی ثابت متوالی را ارائه کردند که به جای استفاده از استراتژی‌های متوازن‌سازی ثابت پرتفو، از استراتژی‌های بهترین متوازن‌سازی ثابت پرتفو استفاده می‌کند. این الگوریتم با نام الگوریتم تبعیت از رهبر نیز شناخته می‌شود. گایورونسکی و استلا (۲۰۰۰) برای بازارهای غیرایستا، استراتژی متوازن‌سازی متغیر پرتفو را ارائه کردند. هلمبولد، شاپیر، سینگر و وارموث<sup>۷</sup> (۱۹۹۸) الگوریتم گرادیان‌نمایی را ارائه کردند که در آن از اطلاعات مرتبه اول استفاده می‌شود. ایده اصلی در الگوریتم یاد شده این است که اگر نسبت قیمتی یک دارایی در دوره مشخص، بزرگ‌تر از نسبت تغییر ثروت در دوره فعلی است، نسبت آن دارایی در پرتفوی دوره بعد می‌بایست افزایش پیدا کند که مطابق با اصل تبعیت از برنده است. آگاروال، هازان، کیل و شاپیر<sup>۸</sup> (۲۰۰۶) الگوریتم برخط گام نیوتن را ارائه کردند که علاوه بر اطلاعات مرتبه اول، اطلاعات مرتبه دوم را نیز در مدل منظور می‌کند.

برخلاف ردیابی برنده‌ها که در الگوریتم‌های تبعیت از برنده وجود دارد، در الگوریتم‌های تبعیت از بازنده، سعی بر این است که ثروت از دارایی‌های با عملکرد خوب به دارایی‌های با عملکرد بد منتقل شود. به این اصل، بازگشت به میانگین گفته می‌شود که در پژوهش‌های بوند و تالر<sup>۹</sup> (۱۹۸۵) معرفی شده است. طبق این اصل، دارایی‌های با عملکرد خوب (بد)، در دوره‌های آتی دارای عملکرد بد (خوب) خواهند بود. در حالی که الگوریتم‌های تبعیت از برنده، از نظر تئوری درست هستند، اغلب در بازارهای واقعی عملکرد ضعیفی دارند. شاید علت اصلی عملکرد ضعیف آنها، اصل مومنتوم باشد که مطابق با دنیای واقعی نیست. بنابراین، طبیعی است که از ایده بازگشت به میانگین استفاده شود تا استراتژی‌های جدیدی با عملکرد تجربی بهتر توسعه داده شود.

1. Cover  
 3. Blum and Kalai  
 5. Akcoglu, Drineas and Kao  
 7. Helmbold, Schapire, Singer and Warmuth  
 9. Bondt and Thaler

2. Ordentlich  
 4. Cross and Barron  
 6. Gaivoronski and Stella  
 8. Agarwal, Hazan, Kale and Schapire

تاکنون، مطالعات زیادی در زمینه وجود بازگشت به میانگین در بازارهای مالی انجام شده است که از جمله آنها می‌توان به پژوهش‌های فاما و فرنچ<sup>۱</sup> (۱۹۸۸)، پوتربا و سامرز<sup>۲</sup> (۱۹۸۸)، جگادیش<sup>۳</sup> (۱۹۹۱)، بالورز، وو و گیلاند<sup>۴</sup> (۲۰۰۲)، سرلتیس و روزنبرگ<sup>۵</sup> (۲۰۰۷) و کونادو، گیل آلانا و پرز گارسیا<sup>۶</sup> (۲۰۱۰) اشاره کرد. همچنین در ایران نیز پژوهش‌های متعددی در این زمینه انجام شده است که به دو نمونه از آنها اشاره می‌شود. تهرانی، انصاری و سارنج (۱۳۸۷) وجود بازگشت به میانگین را با استفاده از نسبت واریانس آزمودند و در بیشتر دوره‌های زمانی، وجود پدیده بازگشت به میانگین را در دو شاخص قیمت و بازده نقدی نشان دادند. کرباسی، نوری فرد و چناری (۱۳۹۱) این پدیده را با استفاده از آزمون ریشه واحد بررسی کردند و بدین نتیجه رسیدند که تغییرات متوالی در شاخص کل قیمت سهام و شاخص پنجاه شرکت برتر، از فرایند گام تصادفی پیروی کرده‌اند و به بیان دیگر، خاصیت بازگشت به میانگین ندارند؛ اما سایر شاخص‌های بررسی شده در این پژوهش، از اصل بازگشت به میانگین پیروی کرده‌اند.

حال الگوریتم‌های بسیار مهم در زمینه الگوریتم‌های تبعیت از بازنده بررسی می‌شود. برودین، ال یانیو و گوگان<sup>۷</sup> (۲۰۰۴) الگوریتم ضد هم‌بستگی<sup>۸</sup> را ارائه کردند که براساس هم‌بستگی متقاطع بازده دارایی‌ها در دو پنجره زمانی پشت سر هم، تلاش می‌کند که مفهوم بازگشت به میانگین را منعکس کند. این الگوریتم کاملاً ابتکاری است و هیچ ضمانت تنوریکی ندارد.

لی، هوی، ژائو و گوپالکریشنان<sup>۹</sup> (۲۰۱۲) الگوریتم بازگشت به میانگین منفعلانه - تهاجمی را ارائه کردند که در آن، از یک تابع زیان برای نشان دادن اصل بازگشت به میانگین استفاده می‌شود. همچنین، در این الگوریتم از روش یادگیری منفعلانه - تهاجمی برای بهینه‌سازی پرتفو استفاده می‌شود. گائو و ژانگ<sup>۱۰</sup> (۲۰۱۳) الگوریتم ترکیبی منفعلانه - تهاجمی را ارائه کردند که به منظور کنترل وزن انتقالی از پرتفو یک دوره به پرتفو دوره بعد، از یک تابع زیان چند ضابطه‌ای استفاده می‌شود. لی و هوی (۲۰۱۲) الگوریتم بازگشت به میانگین متحرک برخط را ارائه کردند که در آن، از مفهوم بازگشت به میانگین چند دوره‌ای در کنار روش‌های یادگیری برخط استفاده شده است. لی، هوی، ژائو و گوپالکریشنان (۲۰۱۳) الگوریتم بازگشت به میانگین اطمینان وزنی را ارائه کردند که از روش یادگیری اطمینان وزنی استفاده می‌کند. ایده اصلی این روش، حفظ توزیع گاوسی یا به‌روزرسانی سلسله‌مراتبی توزیع، مطابق با یادگیری منفعلانه - تهاجمی است. هانگ، ژو، لی، هوی و ژو<sup>۱۱</sup> (۲۰۱۳) الگوریتم بازگشت به میانه استوار را ارائه کردند که در آن، از تخمین‌زننده استوار میانه  $L_1$  برای پیش‌بینی قیمت دوره بعد استفاده می‌شود. مطابق با این تخمین‌زننده، پیش‌بینی قیمت دوره بعد برابر خواهد بود با نقطه‌ای که کمترین فواصل اقلیدسی را از  $w$  نقطه قیمتی اخیر داشته باشد. در ادامه، از روش یادگیری

1. Fama and French

3. Jegadeesh

5. Serletis and Rosenberg

7. Borodin, El-Yaniv and Gogan

9. Li, Zhao, Hoi and Gopalkrishnan

11. Huang, Zhou, Li, Hoi, and Zhou

2. Poterba and Summers

4. Balvers, Wu and Gilland

6. Cunado, Gil-Alana and Perez de Gracia

8. Anti Correlation

10. Gao and Zhang

12. L1-median Estimator

منفعلانه - تهاجمی برای بهینه‌سازی پرتفو استفاده شده است. زیجین<sup>۱</sup> (۲۰۱۶) الگوریتم بازگشت به میانگین نامتقارن میانگین متحرک وزن‌دار را ارائه کرد که در آن، برای انعکاس بهتر مفهوم بازگشت به میانگین، از تابع زیان چندضابطه‌ای و همچنین، میانگین متحرک وزن‌دار قیمت دارایی‌ها در دوره‌های پیش، برای پیش‌بینی نسبت قیمتی دوره بعد استفاده شده است.

در کنار الگوریتم‌های تبعیت از برنده و تبعیت از بازنده، الگوریتم‌هایی نیز وجود دارند که از هر دو سهم‌های برنده و بازنده استفاده می‌کنند که به آنها الگوریتم‌های تطابق با الگو گفته می‌شود. این الگوریتم‌ها، به صورت تجربی از الگوهای تکراری در زمان‌های گذشته برای تشکیل پرتفو استفاده می‌کنند. بنا بر گفته گیورفی، لوگوسی و یودینا<sup>۲</sup> (۲۰۰۶) به طور معمول، الگوریتم‌های تطابق با الگو، دو گام انتخاب نمونه و بهینه‌سازی پرتفو را شامل می‌شوند. در گام انتخاب نمونه، بر اساس معیارهایی نظیر هیستوگرام، کرنل، نزدیک‌ترین همسایه، همبستگی یا خوشه‌بندی، میزان شباهت داده‌های اخیر با داده‌های گذشته اندازه‌گیری شده و داده‌هایی در گذشته که بنا بر معیارهای فوق مشابه با داده‌های اخیر قلمداد می‌شوند، برای نمونه انتخاب می‌شود. در گام بهینه‌سازی پرتفو، با توجه به خروجی گام قبل، می‌توان پرتفو بهینه را از طریق توابع هدفی همچون لگاریتم بهینه، نیمه‌لگاریتم بهینه و مارکوویتز به دست آورد. گیورفی و شافر<sup>۳</sup> (۲۰۰۳) برای اولین بار الگوریتمی را معرفی کردند که از معیار هیستوگرام در گام اول و تابع هدف لگاریتم بهینه در گام دوم استفاده می‌کند. گیورفی، لوگوسی و یودینا (۲۰۰۶) استراتژی‌ای را ارائه کردند که ترکیبی از دو روش کرنل در گام اول و لگاریتم بهینه در گام دوم است. همچنین گیورفی، یودینا و واک<sup>۴</sup> (۲۰۰۸) استراتژی متشکل از معیار نزدیک‌ترین همسایه در گام اول و لگاریتم بهینه در گام دوم را ارائه کردند. لی، هوی و گوپالکریشنان (۲۰۱۱) استراتژی CORN را معرفی کردند که ترکیب روش همبستگی در گام اول و لگاریتم بهینه در گام دوم است. عبدی (۱۳۹۶) برای انتخاب نمونه، از روش خوشه‌بندی طیفی که یکی از روش‌های نوین در مبحث داده‌کاوی است، بهره برد و بهینه‌سازی پرتفو را با استفاده از تابع هدف لگاریتم بهینه انجام داد. وانگ، وانگ، وانگ و ژانگ<sup>۵</sup> (۲۰۱۸) توسعه‌ای از استراتژی CORN را ارائه کردند که ریسک را در بهینه‌سازی پرتفوی در نظر می‌گیرد.

علاوه بر سه دسته فوق، دسته دیگری از پژوهش‌های در حوزه انتخاب برخط سبد سرمایه‌گذاری وجود دارد که با یادگیری خبره‌ها مرتبط است و به آنها الگوریتم‌های فرایادگیری گفته می‌شود. به طور کلی در الگوریتم فرایادگیری، تعدادی خبره در نظر گرفته می‌شود که استراتژی‌های آنها می‌تواند از دسته استراتژی‌های مشابه یا متفاوت باشد. هر خبره یک پرتفو برای دوره بعد ارائه می‌دهد و در نهایت، الگوریتم فرایادگیری این پرتفوها را ترکیب می‌کند تا پرتفوی نهایی برای دوره آینده را ارائه دهد. وووک و واتکینز<sup>۶</sup> (۱۹۹۸) الگوریتم جمع‌کننده را در مبحث انتخاب برخط سبد سهام ارائه کردند که در آن، الگوریتم پرتفوی یونیورسال یک مورد خاص محسوب می‌شود. آکوگلو، دریناس و کائو (۲۰۰۵) با توسعه استراتژی پرتفوی یونیورسال، استراتژی یونیورسال شدن سریع را ارائه کردند که خبرگان آن از استراتژی‌هایی مانند

1. Zijin

3. Györfi and Schäfer

5. Wang, Wang, Wang and Zhang

2. Györfi, Lugosi and Udina

4. Györfi, Udina and Walk

6. Vovk and Watkins



استراتژی خرید تک سهم استفاده می‌کنند. داس و بانرجی<sup>۱</sup> (۲۰۱۱) الگوریتم به‌روزرسانی گرادیان برخط را بر اساس الگوریتم گرادیان نمایی ارائه دادند. هازان و سشادری<sup>۲</sup> (۲۰۰۹) نیز الگوریتم تبعیت از تاریخ راهنما را برای محیط‌های متغیر ارائه کردند.

## روش‌شناسی پژوهش

همان‌طور که بیان شد، اغلب الگوریتم‌های ارائه‌شده در ادبیات موضوع، از اصل بازگشت به میانگین تک‌دوره‌ای پیروی می‌کنند که این مسئله در صورت وجود نوسان‌های شدید در بازار، به راه‌حل‌های اشتباه در حل مسئله بهینه‌سازی سبد منجر می‌شود و پرتفو را در جهت اشتباه به‌روزرسانی می‌کند. اما در این بخش، با هدف بهبود عملکرد الگوریتم‌های موجود در ادبیات الگوریتم‌های تبعیت از بازنده، به دنبال ارائه دو الگوریتم هستیم که هم بازگشت به میانگین را به صورت چند دوره‌ای در نظر می‌گیرد و هم برای افزایش دقت در انتخاب سبد، از وزن‌های پویا استفاده می‌کند. این وزن‌ها در هر دوره زمانی، متناسب با عملکرد گذشته خبره‌ها متغیر است. بدین ترتیب، هر خبره‌ای که پرتفوی پیشنهادی آن دارای خطای تجمعی بیشتری تا آن دوره باشد، وزن کمتری در تشکیل پرتفوی نهایی دوره آتی خواهد داشت. در این بخش، پس از فرمول‌بندی مسئله، روش‌ها و خبرگان به‌کارگرفته‌شده معرفی شده و در ادامه، به ارائه دو الگوریتم پرداخته می‌شود.

## فرمول‌بندی مسئله

سرمایه‌گذاری را در نظر بگیرید که قصد دارد سرمایه خود را بین  $m$  سهم ( $m \geq 2$ )، در افق زمانی  $T$  دوره ( $T \geq 1$ ) سرمایه‌گذاری کند. آخرین قیمت  $m$  سهم در گذشته در دوره  $t$ ، به صورت بردار  $p_t = (p_{1t}, p_{2t}, \dots, p_{mt})$  نمایش داده می‌شود.  $x_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{mt})$  بردار نسبت قیمتی سهم در زمان  $t$  تعریف می‌شود و درایه مربوط به سهم  $i$ ام در زمان  $t$  ( $x_{it}$ ) از طریق  $x_{it} = \frac{p_{it}}{p_{i,t-1}}$  محاسبه می‌شود. این رابطه، به نوعی بیانگر بازدهی سهم معین در زمان مشخص بوده و حاصل آن عددی نزدیک به ۱ است و چنانچه عدد ۱ را از آن کم کنیم، بازدهی سهم به دست می‌آید. ماتریس  $X = \{x_1, \dots, x_T\}$  متشکل از  $T$  سطر و  $m$  ستون را در نظر بگیرید که در آن  $T$  بیانگر تعداد دوره‌های زمانی و  $m$  بیانگر تعداد سهام است.  $X = [ ]_{T \times m}$  به عنوان ماتریس ورودی به الگوریتم در نظر گرفته می‌شود.

نسبت‌های سرمایه‌گذاری در  $m$  سهم در ابتدای دوره  $t$  به صورت رابطه  $b_t = (b_{1t}, b_{2t}, \dots, b_{mt})$  نمایش داده می‌شود که در آن فرض فروش استقرایی برقرار نبوده و رابطه  $\sum_{i=1}^m b_{it} = 1$  برقرار است.  $B = \{b_1, \dots, b_T\}$  نیز همانند  $X$ ، یک ماتریس  $T \times m$  بوده و نمایانگر استراتژی سرمایه‌گذاری برای  $T$  دوره است. در اثر انتخاب پرتفوی  $b_t$  در زمان  $t$  بازدهی به میزان  $W_t$  کسب می‌شود که در آن  $W_t = b_t^T x_t = \sum_{i=1}^m b_{it} x_{it}$  از آنجا که در ابتدای هر دوره مبلغ به دست آمده مجدداً سرمایه‌گذاری می‌شود، پس از  $T$  دوره، پرتفویی با ارزش تجمعی  $W_T$  حاصل می‌شود که ارزش

اولیه پرتفو را با نرخ  $\prod_{t=1}^T b_t^\top x_t$  افزایش یا کاهش می‌دهد. ثروت تجمعی پرتفو در انتهای افق سرمایه‌گذاری از طریق رابطه ۱ به دست می‌آید:

$$W_T = W_0 \prod_{t=1}^T b_t^\top x_t = W_0 \prod_{t=1}^T \sum_{i=1}^m b_{it} x_{it} \quad (\text{رابطه ۱})$$

که در آن  $W$  بیانگر ثروت اولیه سرمایه‌گذاری شده است و معمولاً در الگوریتم‌های انتخاب برخط سبد سهام آن را برابر با یک در نظر می‌گیرند ( $W_0 = 1$ ). همچنین در این الگوریتم‌ها هدف بیشینه‌سازی ثروت تجمعی  $W_T$  است و استراتژی  $B$  جهت دستیابی به این هدف طراحی می‌شود.

### تکنیک یادگیری منفعلانه - تهاجمی

کرامر، دکل، کشت، شوارتز و سینگر<sup>۱</sup> (۲۰۰۶) تکنیک یادگیری برخط منفعلانه - تهاجمی را ارائه کردند که در آن از یک تابع زیان برای یادگیری در دوره‌های آتی استفاده می‌شود. لی، هوی، ژائو و گوپالکریشنان (۲۰۱۲) با گرفتن ایده از این پژوهش، تابع زبانی را برای به‌کارگیری مفهوم بازگشت به میانگین در مدل خود ارائه کردند (رابطه ۲).

$$l_\varepsilon(b, x_t) = \begin{cases} 0 & b \cdot x_t \leq \varepsilon \\ b \cdot x_t - \varepsilon & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{رابطه ۲})$$

که در آن  $\varepsilon \geq 0$  پارامتر حساسیت است که آستانه بازگشت به میانگین را کنترل می‌کند. از آنجا که بردار نسبت قیمتی  $x_t$  حول یک نوسان می‌کند،  $\varepsilon \leq 1$  قرار داده می‌شود تا خرید دارایی‌های با عملکرد ضعیف امکان‌پذیر شود. آنها با ارائه کمی تغییرات، رابطه ۲ را به صورت رابطه ۳ بازنویسی کردند.

$$l_\varepsilon(b, \tilde{x}_{t+1}) = \begin{cases} 0 & b \cdot \tilde{x}_{t+1} \geq \varepsilon' \\ \varepsilon' - b \cdot \tilde{x}_{t+1} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{رابطه ۳})$$

که در آن  $\tilde{x}_{t+1}$  بردار پیش‌بینی نسبت‌های قیمتی در دوره  $t + 1$  و  $\varepsilon'$  پارامتری برای کنترل بازگشت به میانگین است.

مطابق با این رابطه، اگر بازده انتظاری بر اساس آخرین قیمت‌ها بیشتر از پارامتر حساسیت  $\varepsilon'$  باشد، زیان برابر با صفر خواهد بود، در غیر این صورت، زیان به صورت خطی افزایش می‌یابد. تابع هدف در روش یادگیری منفعلانه - تهاجمی به صورت رابطه ۴ است:

$$b_{t+1} = \arg \min \frac{1}{2} \|b - b_t\|^2 \text{ s.t. } b \cdot \tilde{x}_{t+1} \geq \varepsilon' \quad (\text{رابطه ۴})$$

ایده کلی به‌روزرسانی در روش یادگیری منفعلانه تهاجمی بدین صورت است که اگر محدودیت مسئله برقرار باشد،

پرتفو به صورت منفعلانه حفظ می‌شود ( $b_{t+1} = b_t$ ) و اگر محدودیت مسئله برقرار نباشد، پرتفو به صورت فعالانه به‌روزرسانی می‌شود تا محدودیت فوق برقرار شود. در این صورت، پرتفویی انتخاب خواهد شد که کمترین میزان انحراف از پرتفوی قبل را داشته باشد. پس از حل مسئله با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، بردار پرتفوی دوره آتی از طریق رابطه ۵ محاسبه می‌شود:

$$b_{t+1} = b_t + \lambda_{t+1}(\tilde{x}_{t+1} - \bar{x}_{t+1}1) \quad (\text{رابطه ۵})$$

که در آن  $\bar{x}_{t+1}$  میانگین بردار پیش‌بینی نسبت قیمتی در دوره  $t+1$ ،  $1$  بردار سطری واحد است و  $\lambda_{t+1}$  از طریق رابطه ۶ محاسبه می‌شود.

$$\lambda_{t+1} = \max \left\{ 0, \frac{\varepsilon' - b_t \cdot \tilde{x}_{t+1}}{\|\tilde{x}_{t+1} - \bar{x}_{t+1}1\|^2} \right\} \quad (\text{رابطه ۶})$$

### خبرگان به کار گرفته شده

مطابق با پژوهش‌های صورت‌گرفته در زمینه الگوریتم‌های تبعیت از بازنده، فرض وجود بازگشت به میانگین چند دوره‌ای نسبت به بازگشت به میانگین تک‌دوره‌ای، به عملکرد بهتر منجر خواهد شد. به همین دلیل، در این پژوهش نیز از روش‌هایی استفاده شده است که بتوانند بازگشت به میانگین چند دوره‌ای را منعکس کنند. در این راستا از دو روش میانگین متحرک ساده (رابطه ۷) و هموارسازی نمایی (رابطه ۸) استفاده شده است.

$$\tilde{x}_{t+1}(\omega) = \frac{1}{\omega} \left( \frac{p_t}{p_t} + \frac{p_{t-1}}{p_t} + \dots + \frac{p_{t-\omega+1}}{p_t} \right) = \frac{1}{\omega} \left( 1 + \frac{1}{x_t} + \dots + \frac{1}{\odot_{i=0}^{\omega-2} x_{t-i}} \right) \quad (\text{رابطه ۷})$$

$\omega$  اندازه پنجره زمانی و  $\odot$  ضرب مؤلفه در مؤلفه بردارها است.

$$\tilde{x}_{t+1}(\alpha) = \alpha 1 + (1 - \alpha) \frac{EMA_{t-1}(\alpha) p_{t-1}}{p_t} = \alpha 1 + (1 - \alpha) \frac{\tilde{x}_t}{x_t} \quad (\text{رابطه ۸})$$

$\alpha$  ضریب ثابت هموارسازی نمایی و  $EMA_{t-1}(\alpha)$  پیش‌بینی روش هموارسازی نمایی از قیمت در زمان  $t-1$  است (لی، هوی، ژائو و گوپالکریشن، ۲۰۱۲).

### پیش‌بینی با بهره‌مندی از نظر خبرگان

در سال‌های گذشته، نظریه پیش‌بینی با بهره‌مندی از نظر خبرگان گسترش سریعی داشته است. بهره بردن از نظر خبرگان، به اتخاذ تصمیم‌های برخط منجر می‌شود و در نتیجه، تصمیم‌گیرنده می‌تواند تصمیم‌های خود را متناسب با شرایط، تغییر دهد. این نظریه، نوعی یادگیری برخط بوده و الگوریتم‌های متعددی برای آن ارائه شده است. در این الگوریتم‌ها، سنجه عملکرد معمولاً زیان مورد انتظار است. ایده‌ای که در این نظریه مطرح است، به‌روزرسانی وزن‌های هر

یک از خبرگان است که در زمینه‌های مختلفی نظیر یادگیری ماشین، بهینه‌سازی، تئوری بازی‌ها و... کاربرد دارد. یکی از الگوریتم‌هایی که برای به‌روزرسانی وزن‌ها استفاده می‌شود، الگوریتم Hedge است. در این الگوریتم که فروند و شاپیر<sup>۱</sup> (۱۹۹۷) آن را ارائه کرده‌اند، به‌جای آنکه وزن‌ها به‌صورت خطی تغییر کنند، از فرمول نمایی طبق رابطه ۹ برای به‌روزرسانی وزن‌ها استفاده می‌شود.

$$w_{t+1}^{(j)} = w_t^{(j)} \exp\left(-\eta \sum_{s=1}^t l_s^{(j)}\right) \quad \text{رابطه ۹}$$

که در آن  $w_{t+1}^{(j)}$  وزن خبره  $j$  در دوره  $t + 1$ ،  $\eta$  نرخ یادگیری الگوریتم و  $l_s^{(j)}$  زیان خبره  $j$  در زمان  $s$  است. شکل ۱ مراحل الگوریتم Hedge را به‌ترتیب در مسئله انتخاب برخط سبد معرفی می‌کند:

ورودی: مقدار  $1 \leq \eta$  را تعیین کنید. به ازای هر خبره  $j$  وزن  $w_1^{(j)} = 1$  را تخصیص دهید.

فرایند پردازش:

به ازای  $t = 1, 2, \dots, T$

۱. مطابق با احتمالات نسبت داده‌شده به هر خبره یعنی  $q_t^{(j)}$ ، پیش‌بینی را انجام دهید.

$$q_t^{(j)} = \frac{w_t^{(j)}}{\sum_{j=1}^n w_t^{(j)}}$$

۲. تابع زیان تجمعی تا دوره  $t$  را به ازای هر خبره  $j$  یعنی  $L_t^{(j)} = \sum_{s=1}^t l_s^{(j)}$  محاسبه کنید.

۳. قاعده به‌روزرسانی زیر را مطابق با زیان‌ها برای هر خبره محاسبه کنید.

$$w_{t+1}^{(j)} = w_t^{(j)} \exp(-\eta L_t^{(j)})$$

### شکل ۱. الگوریتم Hedge

اصل کلی در این روش بدین‌صورت است که وزن هر خبره‌ای که دارای خطای بیشتر (کمتری در پیش‌بینی باشد، در دوره بعد کمتر (بیشتر) خواهد شد.

### الگوریتم پیشنهادی اول

این الگوریتم از پنج گام تشکیل شده است. در گام اول، ماتریس نسبت قیمتی  $X = [ ]_{T \times m}$  به الگوریتم وارد می‌شود که در آن سطرها نشان‌دهنده روزهای موجود در بازه زمانی انتخابی و ستون‌ها بیانگر سهم‌های مختلف است. در گام دوم، از خبرگان میانگین متحرک با اندازه پنجره زمانی‌های مختلف از ۳ تا  $TW$  روز اخیر استفاده می‌شود و هریک از آنها، پیش‌بینی خود را از بردار نسبت قیمتی دوره آتی ارائه می‌دهد. خروجی این گام، به‌عنوان ورودی گام بعد تلقی می‌شود. در

گام سوم، با توجه به آشکار شدن مقادیر واقعی و همچنین، گرفتن مقادیر پیش‌بینی هر یک از خبرگان در مرحله قبل، می‌بایست زیان و در نتیجه زیان تجمعی هر یک از خبرگان با توجه به رابطه میانگین مربعات خطا محاسبه شود. در گام بعد، مطابق با الگوریتم Hedge وزن هر خبره به‌دست می‌آید. بدیهی است هر خبره‌ای که پیش‌بینی آن دارای زیان تجمعی بیشتری تا آن دوره باشد، وزن کمتری در پیش‌بینی دوره آتی خواهد داشت. پس از محاسبه وزن‌ها با توجه به رابطه ۱۰، متوسط وزن پیش‌بینی خبرگان، به‌عنوان پیش‌بینی نهایی در نظر گرفته می‌شود.

$$\tilde{x}_{t+1} = \sum_{j=1}^n q_t^{(j)} \tilde{x}_{t+1}^{(j)} \quad (\text{رابطه } 10)$$

در گام پنجم، از روش یادگیری منفعلانه - تهاجمی برای تشکیل پرتفو استفاده می‌شود. سپس از الگوریتم دوچی، شالو شوارتز، سینگر و چاندر<sup>۱</sup> (۲۰۰۸) برای نرمال‌سازی پرتفو استفاده می‌شود تا فرض عدم فروش استقراسی نقض نشود و  $\sum_{i=1}^m b_{it} = 1$  برقرار باشد.

### الگوریتم پیشنهادی دوم

این الگوریتم از شش گام تشکیل شده است. مشابه با الگوریتم یک، در گام اول ماتریس نسبت قیمتی  $X = [ ]_{T \times m}$  به الگوریتم وارد می‌شود. در گام دوم، از خبرگان هموارسازی نمایی با مقادیر  $\alpha$  مختلف که همگی در بازه  $[0, 1]$  قرار دارند، استفاده می‌شود. هر یک از  $n$  خبره، پیش‌بینی خود را از بردار نسبت قیمتی دوره آتی ارائه داده و خروجی این گام به‌عنوان ورودی گام بعد تلقی می‌شود. حال، هر یک از  $n$  خبره مطابق با تکنیک یادگیری منفعلانه - تهاجمی پرتفوی منحصربه‌فردی را ایجاد می‌کنند. بنابراین محصول این گام،  $n$  پرتفوی پیشنهادی برای دوره آتی است. در گام چهارم، بازده حاصل از هر یک از پرتفوه‌های پیشنهادی با لحاظ شدن هزینه‌های معاملاتی محاسبه می‌شود. سپس زیان هر پرتفوی پیشنهادی توسط رابطه  $l_t^{(j)} = \exp(-ret_t^{(j)})$  محاسبه می‌شود که در آن بازدهی پرتفوی پیشنهادی خبره  $j$  در زمان  $t$  است. در گام بعد، مطابق با الگوریتم Hedge وزن هر خبره محاسبه می‌شود. بدیهی است هر خبره‌ای که پرتفوی پیشنهادی آن دارای زیان تجمعی بیشتری تا آن دوره باشد، وزن کمتری در تشکیل پرتفوی نهایی دوره آتی خواهد داشت. در گام ششم، باید عملیات ضرب ماتریسی را روی ماتریس پرتفوه‌های پیشنهادی حاصل از گام دوم و ماتریس وزن‌های حاصل از گام پنجم انجام داد تا پرتفوی نهایی برای دوره بعد تشکیل شود.

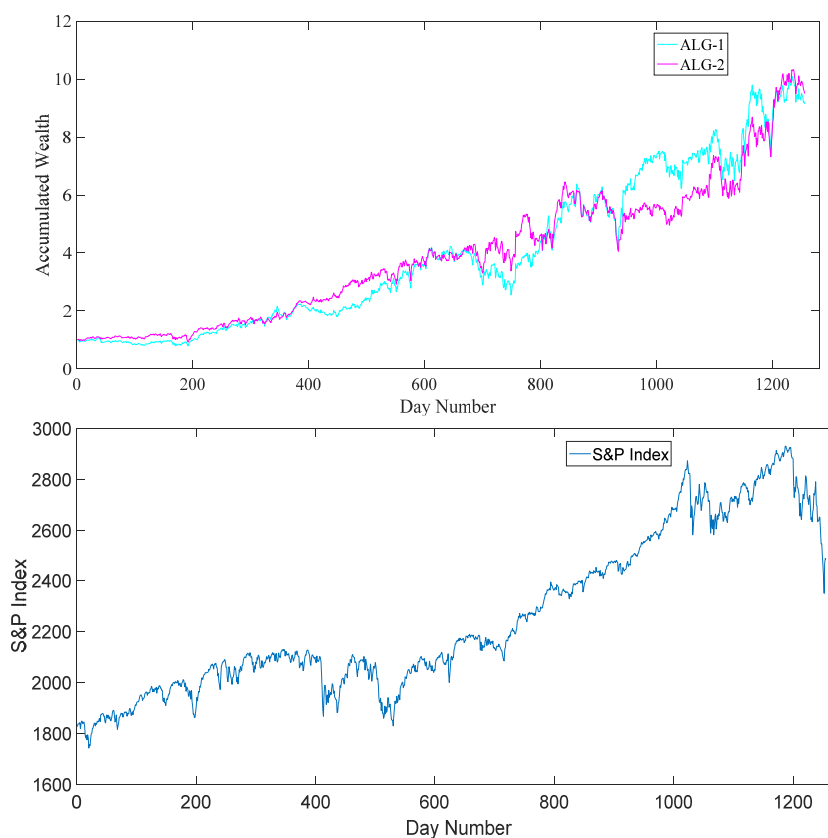
### یافته‌های پژوهش

در این پژوهش از داده‌های قیمتی روزانه ۲۵ شرکت در بازه زمانی پنج ساله (از ۶ ژانویه ۲۰۱۴ تا ۲۸ دسامبر ۲۰۱۸) استفاده شده است. این ۲۵ شرکت به‌صورت تصادفی از فهرست شرکت‌های موجود در شاخص S&P500 انتخاب

شده‌اند. همچنین سعی شده است تا فعال‌ترین سهام شرکت‌های موجود در این شاخص استخراج شود. علت انتخاب این زیرمجموعه از فهرست فعال‌ترین شرکت‌ها این است که سهام آنها تا حد زیادی فاقد ریسک نقدشوندگی است. همچنین بسته‌نبودن و در نتیجه معامله مکرر سهام آنها سبب می‌شود سری‌های زمانی تشکیل شده که ورودی الگوریتم‌ها هستند، مقادیر تکراری و ثابت نداشته باشد و در نتیجه، نتایجی که الگوریتم به دست می‌آید، به واقعیت نزدیک‌تر باشد. داده‌های استفاده‌شده در این پژوهش، ۱۲۵۵ مشاهده برای هر سهم است، در نتیجه یک سال کاری شامل ۲۵۱ روز محاسبه شده است. این عدد در محاسبه درصد بازدهی سالیانه و انحراف معیار پرتفو کاربرد دارد. در الگوریتم‌های پیشنهادی مقادیر پارامترها به صورت زیر است:

$$\varepsilon' = 1/50, \quad n = 6, \quad TW = 7, \quad \eta = 0/8$$

نرخ هزینه معاملاتی در همه مدل‌ها برابر با  $\beta = 0/3\%$  و نرخ بهره بدون ریسک  $R_F = 3\%$  در نظر گرفته شده است. بنابراین با توجه به پارامترهای ذکر شده در بالا، الگوریتم‌ها پیاده‌سازی شدند و نتایج آنها تحلیل و با یکدیگر مقایسه شد. شکل ۲، ثروت تجمعی ایجاد شده توسط دو الگوریتم را نشان می‌دهد که با سایر الگوریتم‌های موجود در ادبیات موضوع، مقایسه شده است.

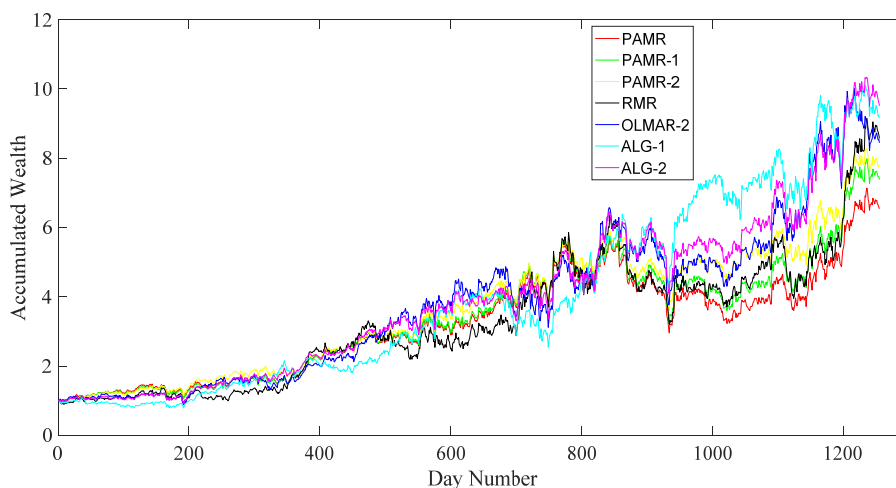


شکل ۲. الف) ثروت تجمعی دو الگوریتم در دوره زمانی ب) شاخص S&P500

همان‌طور که در شکل ۲- الف مشخص است، ثروت تجمعی الگوریتم‌ها در طول زمان دارای روندی صعودی است؛ به‌گونه‌ای که در الگوریتم یک، در روز ۱۲۳۳ام به ماکزیمم مقدار خود، یعنی  $10/32$  و در الگوریتم دوم در روز ۱۲۳۴ام به ماکزیمم مقدار خود، یعنی  $10/05$  می‌رسد. همچنین شکل ۲- ب روند پنج‌ساله شاخص S&P500 را نمایش می‌دهد. به‌طور کلی این شاخص، طی این دوره روند صعودی داشته است، هرچند با نوسان‌هایی نیز همراه بوده است. چنانچه بازدهی الگوریتم‌ها و بازدهی شاخص طی این دوره محاسبه شود، مشاهده خواهد شد که بازدهی ایجادشده از طریق این الگوریتم‌ها، به‌مراتب بیشتر از بازدهی ایجادشده توسط شاخص و در نتیجه پرتفوی ردياب این شاخص است.

همچنین عملکرد این دو الگوریتم با سایر الگوریتم‌هایی که در ادبیات مربوط به الگوریتم‌های تبعیت از بازنده وجود دارد، مقایسه شده است. این الگوریتم‌ها عبارت‌اند از: الگوریتم بازگشت به میانگین منفعلانه - تهاجمی (PAMR)، بازگشت به میانگین متوسط متحرک وزن‌دار (OLMAR) و بازگشت به میانه استوار (RMR). شکل ۳ بازدهی تجمعی الگوریتم‌های تبعیت از بازنده را نشان می‌دهد. مطابق با شکل ۳، ترتیب کسب بیشترین ثروت تجمعی به این صورت است:  $PAMR-2$ ،  $OLMAR-2$ ،  $PAMR-1$ ،  $PAMR$  و  $RMR$ .

ممکن است دلیل عملکرد ضعیف‌تر الگوریتم‌های خانواده PAMR در مقایسه با سایر الگوریتم‌ها این باشد که در پایگاه داده مذکور، قیمت‌ها بیشتر از بازگشت به میانگین چند دوره‌ای پیروی کنند تا بازگشت به میانگین تک‌دوره‌ای. گفتنی است که سایر الگوریتم‌ها، همگی بازگشت به میانگین چند دوره‌ای را در خود منعکس می‌کنند؛ اما ثروت تجمعی به‌تنهایی سنجه خوبی برای مقایسه الگوریتم‌ها نیست. به همین علت می‌بایست از سنجه‌های دیگری استفاده کرد که ریسک را دخیل می‌کنند.



شکل ۳. بازدهی تجمعی الگوریتم‌های تبعیت از بازنده

در جدول ۱ مقادیر معیارهای ارزیابی برای الگوریتم‌های ذکرشده درج شده است.

جدول ۱. معیارهای ارزیابی برای الگوریتم‌های تبعیت از بازنده

ALG-2	ALG-1	OLMAR-2	RMR	PAMR-2	PAMR-1	PAMR	معیار ارزیابی
۹/۵۱۱	۹/۱۴۸	۸/۴۴۲	۸/۵۶۸	۷/۷۷۸	۷/۳۷۸	۶/۵۳۹	ثروت نهایی
۰/۵۶۹	۰/۵۵۷	۰/۵۳۲	۰/۵۳۷	۰/۵۰۷	۰/۴۹۱	۰/۴۵۶	درصد بازدهی سالیانه
۰/۴۵۵	۰/۴۸۴	۰/۵۱۳	۰/۵۳۳	۰/۴۱۷	۰/۴۵۳	۰/۴۵۷	انحراف معیار
۰/۲۷۹	۰/۲۷۲	۰/۳۰۱	۰/۳۲۱	۰/۲۶۴	۰/۲۶۱	۰/۲۶۱	درصد بیشینه افت سرمایه
۱/۱۸۵	۱/۰۸۸	۰/۹۷۹	۰/۵۳۳	۱/۱۴۴	۱/۰۱۷	۰/۹۳۱	نسبت شارپ
۱/۶۷۶	۱/۸۲۱	۱/۴۲۴	۱/۳۴۸	۱/۶۰۱	۱/۵۶۸	۱/۴۵۴	نسبت کالمار

مطابق با جدول ۱، الگوریتم دو توانسته است که عملکرد الگوریتم‌های گذشته را بین ۱۱ تا ۴۵/۴ درصد برحسب سنجه ثروت نهایی ارتقا دهد. در بین الگوریتم‌های موجود، مطابق با سنجه‌های بازدهی، الگوریتم‌های دو، یک و RMR بیشترین بازدهی را کسب کرده‌اند. همچنین در سنجه انحراف معیار، PAMR-2 و PAMR-1 کمترین مقدار را دارند و بهترین سنجه‌اند. این مسئله می‌تواند به دلیل کاربرد متغیر کمبود در تابع هدف آنها رخ داده باشد؛ زیرا این متغیر توانسته است تغییر وزن‌های شدید را کنترل کند و سبب کاهش ریسک در آنها شود. مطابق با سنجه درصد بیشینه افت سرمایه، الگوریتم‌های خانواده PAMR نیز کمترین مقدار را دارند که این مسئله نیز، می‌تواند بنا به دلیل یاد شده باشد. از طرف دیگر، این سنجه در الگوریتم‌های یک و دو مقدار نسبتاً بالایی دارد؛ اما قرار دادن این مسئله در کنار کسب بازدهی بالا، مؤید این اصل در علم مالی است که بازدهی بیشتر، عموماً مصادف با پذیرش ریسک بیشتر است.

با توجه به سنجه‌های شارپ و کالمار، سرمایه‌گذار می‌تواند الگوریتم‌های دو و یک را برای سرمایه‌گذاری انتخاب کند. چنانچه فرد ریسک‌گریز بوده و اولویت وی ضرر نکردن باشد (توجه به سنجه‌های ریسک نامطلوب)، الگوریتم یک را انتخاب می‌کند و چنانچه فرد بازدهی بیشتر را در ازای ریسک معقول طلب کند، الگوریتم دو را برمی‌گزیند.

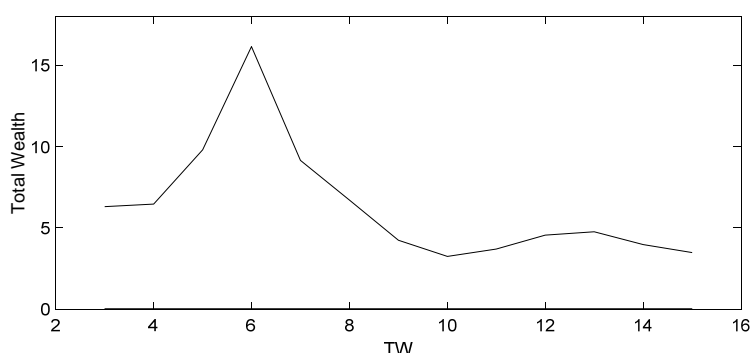
### تحلیل حساسیت پارامترهای الگوریتم‌ها

الگوریتم یک، شامل سه پارامتر آستانه  $(\epsilon')$ ، پنجره زمانی  $(TW)$  و نرخ یادگیری  $(\eta)$  است. همچنین الگوریتم دو، دربرگیرنده سه پارامتر آستانه  $(\epsilon')$ ، تعداد خبرگان  $(n)$  و نرخ یادگیری  $(\eta)$  است که مقادیر هریک از آنها بر ثروت نهایی مؤثر است. بنابراین، نیاز است که تأثیر هریک از آنها بر رفتار ثروت نهایی مشخص شود. در ادامه، تأثیر هریک از پارامترهای نام برده بر ثروت نهایی الگوریتم‌های یک و دو مورد ارزیابی می‌شود.

**پنجره زمانی  $TW$ :** در الگوریتم یک با توجه به اینکه پنجره‌های زمانی در بازه ۳ تا  $TW$  قرار می‌گیرند، از  $TW - ۲$  خبره برای تخمین بردارهای نسبت قیمتی استفاده می‌شود. شکل ۴ مقادیر ثروت نهایی را در بازه  $TW \in [۳, ۱۵]$  نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل مشخص است، با افزایش  $TW$  ابتدا ثروت نهایی افزایش یافته، سپس به نقطه بهینه



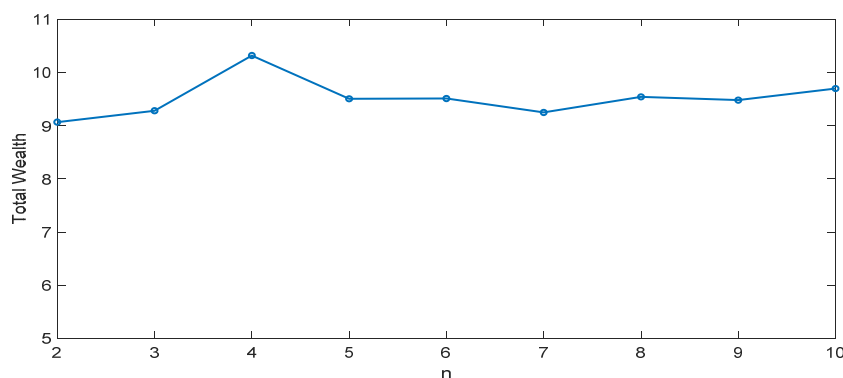
رسیده و در انتها کاهش می‌یابد. مطابق با این شکل، اندازه پنجره زمانی بهینه  $TW = 6$  است (تعداد خبره‌ها برابر با چهار) و هرچه این عدد افزایش می‌یابد، از دقت پیش‌بینی‌ها کاسته می‌شود. این مسئله بدان معناست که به‌کارگیری خبرگان تا یک پنجره زمانی مشخص، مفید است و استفاده از خبرگانی که در آنها اندازه پنجره زمانی بزرگ است، سبب کاهش عملکرد کل الگوریتم می‌شود. در پایگاه داده تحت بررسی،  $TW \in [5, 7]$  به نتایج قابل قبول منجر می‌شود.



شکل ۴. تحلیل حساسیت الگوریتم یک با توجه به پنجره زمانی

$$\text{با فرض } \varepsilon' = 1/5 \text{ و } \eta = 0.8$$

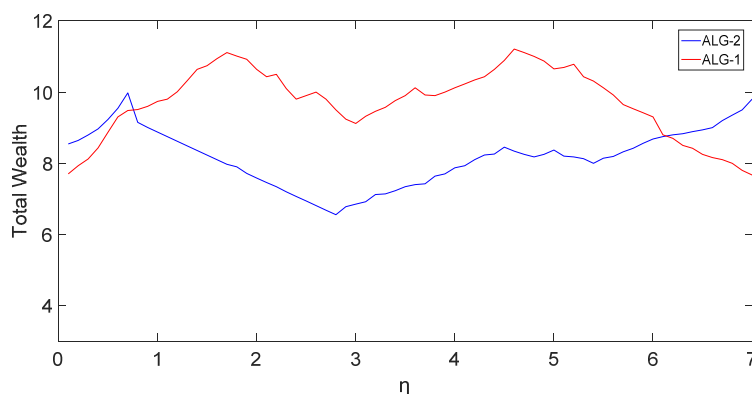
**تعداد خبره‌ها ( $n$ ):** با توجه به اینکه در الگوریتم دو از یک رابطه مبتنی بر تعداد خبره‌ها برای محاسبه ضرایب مختلف ( $\alpha$ ) استفاده می‌شود که در پیش‌بینی خبره‌ها کاربرد دارد، سعی شده است که تأثیر این پارامتر بر ثروت نهایی الگوریتم دو ارزیابی شود. شکل ۵ ثروت نهایی این الگوریتم را در حالی که  $n \in [2, 10]$  است، نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود، ثروت نهایی نسبت به  $n$  استوار بوده و به تغییرات آن به میزان کمتری واکنش نشان می‌دهد. در این پژوهش از  $n = 6$  استفاده شده است که دربرگیرنده نتایج قابل قبولی است.



شکل ۵. تحلیل حساسیت الگوریتم دو با توجه به تعداد خبره‌ها

$$\text{با فرض } \varepsilon' = 1/5 \text{ و } \eta = 0.8$$

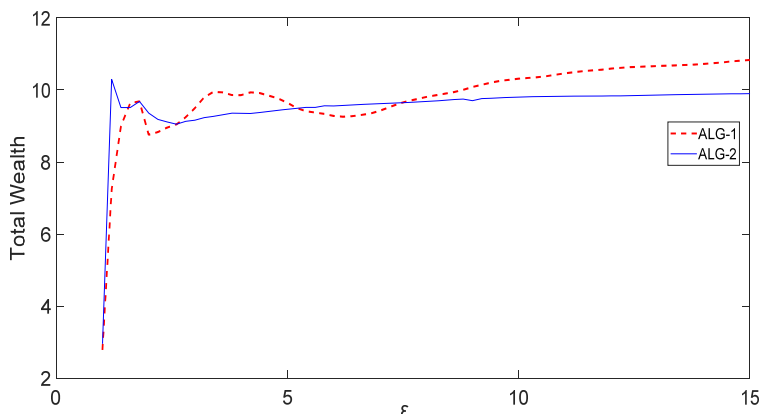
نرخ یادگیری ( $\eta$ ): نرخ یادگیری، وزن تخصیصی به هر خبره را در فرایند یادگیری طبق الگوریتم Hedge تحت تأثیر قرار می‌دهد. به همین علت نیاز است تا تأثیر آن بر ثروت نهایی مشخص شود. شکل ۶ ثروت نهایی الگوریتم‌های یک و دو را برحسب مقادیر مختلف  $\eta$  نشان می‌دهد. از آنجا که دو الگوریتم در نحوه تخمین بردار نسبت قیمتی و همچنین به کارگیری الگوریتم Hedge متفاوت‌اند، تأثیرهای  $\eta$  بر آنها نیز متفاوت است. مطابق با این شکل، در حالت کلی، انتخاب  $\eta = 0/8$  برای هر دو الگوریتم عملکرد خوب آنها را تضمین می‌کند.



شکل ۶. تحلیل حساسیت الگوریتم یک و دو با توجه به نرخ یادگیری

با فرض  $\varepsilon' = 1/5$  و  $TW = 7$  در الگوریتم یک و  $\varepsilon = 1/5$  و  $\eta = 0/8$  در الگوریتم دو

پارامتر آستانه ( $\varepsilon'$ ): در هر دو الگوریتم، برای بهینه‌سازی پرتفو از روش یادگیری منفعلانه - تهاجمی استفاده می‌شود که در آن پارامتر  $\varepsilon'$  تعیین‌کننده نوع رفتار تکنیک است. مطابق با آنچه گفته شد،  $\varepsilon' \geq 1$  است. شکل ۷ ثروت نهایی الگوریتم‌های یک و دو را در بازه  $\varepsilon' \in [1, 15]$  نشان می‌دهد. مطابق با این شکل، اختیار مقادیر کم برای  $\varepsilon'$  منجر به کاهش عملکرد الگوریتم منجر می‌شود؛ اما چنانچه  $\varepsilon' \in [1/5, 15]$  قرار گیرد، ثروت نهایی نسبت به  $\varepsilon'$  استوار خواهد شد و نسبت به تغییرات آن به میزان کمتری واکنش نشان خواهد داد. در این پژوهش، مقدار  $\varepsilon' = 1/50$  در نظر گرفته شده است.



شکل ۷. تحلیل حساسیت الگوریتم یک و دو با توجه به پارامتر آستانه

با فرض  $\eta = 0/8$  و  $TW = 7$  در الگوریتم یک و  $\eta = 0/8$  و  $n = 6$  در الگوریتم دو

## نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این پژوهش، پس از پیاده‌سازی الگوریتم‌های پیشنهادی روی پایگاه داده مدنظر، نتایج آن با سایر الگوریتم‌های موجود در ادبیات مقایسه شد. این دو الگوریتم از نقطه نظر بازدهی نسبت به سایر الگوریتم‌ها عملکرد بهتری دارند. همچنین، ریسک آنها در مقایسه با الگوریتم‌های دیگر، کمابیش بیشتر است و همین مسئله باعث شده است که در دنیای مالی، عموماً بازدهی زیاد در ازای ریسک زیاد کسب شود. اما در مقایسه سنج‌های بازدهی تعدیل‌شده به ریسک، دو الگوریتم فوق بهترین مقادیر را دارند و این به معنای ارزندگی بازدهی به‌دست‌آمده در ازای ریسک متحمل شده است.

در الگوریتم‌های پیشنهادی، از دو روش متفاوت برای پیش‌بینی بردار نسبت قیمتی دوره آتی استفاده شده است که مفهوم بازگشت به میانگین چند دوره‌ای در مدل‌ها را منعکس می‌کنند. الگوریتم یک در دوره اول و الگوریتم دوم همه دوره‌های اخیر را در پیش‌بینی لحاظ می‌کند. همچنین کاربرد الگوریتم یادگیری Hedge در الگوریتم‌های پیشنهادی سبب می‌شود خبره‌های مختلف وزن‌های یکسانی در پیش‌بینی نداشته باشند و وزن‌های آنها متناسب با عملکردشان در پیش‌بینی، به‌روزرسانی شود. در این الگوریتم‌ها، به‌طور مستقیم استوار بودن مدل‌سازی نشده است؛ اما کاربرد چندین خبره و همچنین سیستم وزن‌دهی به‌کارگرفته شده، سبب استوار شدن می‌شود؛ زیرا اگر نویزها و داده‌های قیمتی پرت از دقت پیش‌بینی یک خبره بکاهد، وزن تخصیصی به آن کم می‌شود. این مسئله سبب کاهش تأثیر نویزها و داده‌های قیمتی پرت در پیش‌بینی نهایی می‌شود.

با توجه به مرور ادبیات انجام‌شده در این حوزه، می‌توان موارد زیر را برای پژوهش‌های آتی پیشنهاد کرد:

۱. اصل مومنتوم که در الگوریتم‌های تبعیت از برنده وجود دارد، علی‌رغم مزیت‌های خود، در بازارهای مالی واقعی عملکرد قابل قبولی ندارد. همچنین، اصل بازگشت به میانگین که در الگوریتم‌های تبعیت از بازنده استفاده می‌شود، در بازارهایی که تغییرات قیمتی ناگهانی دارند، به نتایج خوبی منتهی نمی‌شود. بنابراین، ادغام این دو اصل برای به‌دست آوردن الگوریتم انتخاب برخط سیدی که بتواند از هر دو اصل بهره برده و عملکرد بهتری را به همراه داشته باشد، برای پژوهش‌های بعدی پیشنهاد می‌شود.
۲. الگوریتم‌های انتخاب برخط سبد، به‌طور عمده به بازدهی توجه می‌کنند و معمولاً بازدهی زیاد در ازای ریسک زیاد حاصل می‌شود که ممکن است برای سرمایه‌گذاران ریسک‌گریز مطلوب نباشد. بنابراین، توجه به مقوله مدیریت ریسک در الگوریتم‌های انتخاب برخط و به‌خصوص الگوریتم‌های تبعیت از بازنده، به پیشرفت آنها کمک می‌کند.
۳. در الگوریتم‌های انتخاب برخط ارائه‌شده، عمدتاً فروض فروش استقراسی، خرید اعتباری و مالیات در نظر گرفته نشده است. بدیهی است در نظر گرفتن هر یک از این عوامل می‌تواند به واقعی‌تر شدن الگوریتم‌ها و کاربرد بیشتر آنها در دنیای واقعی منجر شود.
۴. در الگوریتم‌های انتخاب برخط، می‌توان اطلاعات جانبی نظیر اطلاعات بنیادی شرکت‌ها، شاخص‌های تکنیکال و... را شرکت داد. این مسئله به نتایج بهتر و واقعی‌تر منتهی می‌شود.

## منابع

- تهرانی، رضا؛ انصاری، حجت اله؛ سارنج، علیرضا (۱۳۸۷). بررسی وجود پدیده بازگشت به میانگین در بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از آزمون نسبت واریانس. *بررسی‌های حسابداری و حسابرسی*، ۱۵(۵۴)، ۱۷-۳۲.
- عبدی، متین (۱۳۹۶). *انتخاب برخط سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از الگوریتم‌های تطابق با الگو*. پایان‌نامه کارشناسی ارشد. گروه مهندسی صنایع. دانشگاه خواجه‌نصیرالدین طوسی تهران.
- کرباسی یزدی، حسین؛ نوری فرد، یداله؛ چناری بوکت، حسن (۱۳۹۱). مطالعه پدیده بازگشت به میانگین در بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از آزمون ریشه واحد. *فصلنامه علمی پژوهشی دانش سرمایه‌گذاری*، ۱(۴)، ۸۷-۱۰۳.

## References

- Abdi, M. (2017). *Online Portfolio Selection Based on Pattern Matching Algorithms*. M. S. Thesis. Faculty of Industrial Engineering, K.N.Toosi University of Tehran. (in Persian)
- Agarwal, A., Hazan, E., Kale, S. & Schapire, R. E. (2006). Algorithms for portfolio management based on the newton method. *Proceedings of International Conference on Machine Learning*, Pennsylvania, USA.
- Akcoğlu, K., Drineas, P. & Kao, M. Y. (2005). Fast universalization of investment strategies. *SIAM Journal on Computing*, 34(1), 1–22.
- Balvers, R., Wu, Y. & Gilland, E. (2002). Mean Reversion across National Stock Markets and Parametric Contrarian Investment Strategies. *The Journal of Finance*, 2(3), 745–772.
- Blum, A. & Kalai, A. (1999). Universal portfolios with and without transaction costs. *Machine Learning*, 35(3), 193–205.
- Borodin, A., El-Yaniv, R. & Gogan, V. (2004). Can we learn to beat the best stock. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 21(1), 579–594.
- Cover, T. M. & Ordentlich, E. (1996). Universal portfolios with side information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 42(2), 348–363.
- Cover, T. M. & Ordentlich, E. (1998). Universal portfolios with short sales and margin. In *Proceedings of Annual IEEE International Symposium on Information Theory*, Cambridge, MA.
- Cover, T. M. (1991). Universal portfolios. *Mathematical Finance*, 1(1), 1-29.
- Crammer, K., Dekel, O., Keshet, J., Shalev-Shwartz, S. & Singer, Y. (2006). Online passive aggressive algorithms, *Journal of Machine Learning Research*, 7(3), 551–585.
- Crammer, K., Dredze, M. & Pereira, F. (2008). Exact convex confidence weighted learning. *Advances in Neural Information Processing Systems 21*, 345–352.
- Cross, J. E. & Barron, A. R. (2003). Efficient universal portfolios for past-dependent target classes. *Mathematical Finance*, 13(2), 245–276.

- Cunado, J., Gil-Alana, L. A. & de Gracia, F. P. (2010). Mean reversion in stock market prices: New evidence based on bull and bear markets. *Research in International Business and Finance* 24, 113–122.
- Das, P. & Banerjee, A. (2011). Meta optimization and its application to portfolio selection. *In Proceedings of the 17th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*, California, USA, 1163-1171.
- DeBondt, W. F. and Thaler, R. (1985). Does the stock market overreact? *Journal of Finance*, 40(3), 793–805.
- Duchi, J., Shalev-Shwartz, S., Singer, Y. & Chandra, T. (2008). Efficient projections onto the  $l_1$ -ball for learning in high dimensions. *In Proceedings of International Conference on Machine Learning*, Helsinki, Finland, 272–279.
- Fama, E. F. & French, K. R. (1988). Permanent and temporary components of stock prices. *Journal of Political Economy*, 96, 246–273.
- Freund, Y. & Schapire, R. E. (1997). A Decision-Theoretic Generalization of On-Line Learning and an Application to Boosting. *Journal of Computer and System Sciences*, 55(1), 119–139.
- Gaivoronski, A. A. & Stella, F. (2000). Stochastic nonstationary optimization for finding universal portfolios. *Annals of Operations Research* 100(1), 165–188.
- Gaivoronski, A. A. & Stella, F. (2003). On-line portfolio selection using stochastic programming. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 27(6), 1013–1043.
- Gao, L., Zhang, W. & Tang, Q. (2013). Passive Aggressive Algorithm for Online Portfolio Selection with Piecewise Loss Function. *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, 360–371.
- Györfi, L. & Schäfer, D. (2003). Nonparametric prediction. *In Advances in Learning Theory: Methods, Models and Applications*, Amsterdam, The Netherlands, 339–354.
- Györfi, L., Lugosi, G. & Udina, F. (2006). Nonparametric kernel-based sequential investment strategies. *Mathematical Finance*, 16(2), 337–357.
- Györfi, L., Udina, F. & Walk, H. (2008). Nonparametric nearest neighbor based empirical portfolio selection strategies. *Statistics and Decisions*, 26(2), 145–157.
- Györfi, L., Urban, A. & Vajda, I. (2007). Kernel-based semi-log-optimal empirical portfolio selection strategies. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 10(3), 505–516.
- Hazan, E. & Seshadhri, C. (2009). Efficient learning algorithms for changing environments. *In Proceedings of the International Conference on Machine Learning*, Montreal, Canada, 393-400.
- Helmbold, D., Schapire, R., Singer, Y. & Warmuth, M. (1998). On-line portfolio selection using multiplicative updates. *Mathematical Finance*, 8(4), 325–347.

- Huang, D., Zhou, J., Li, B., Hoi, S. C. & Zhou, S. (2013). Robust median reversion strategy for on-line portfolio selection. *In Proceedings of the 23th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, 2006–2012.
- Jegadeesh, N. (1991). Seasonality in Stock Price Mean Reversion: Evidence from the U.S. and the U.K. *The Journal of Finance*, 4(2), 1427–1444.
- Karbasi, H., Nouri, Y. & Chenari, H. (2012). Study on mean reversion phenomenon in Tehran Stock Exchange using unit root test. *Journal of Investment Knowledge*, 1(4), 87-103. (in Persian)
- Li, B. & Hoi, S. C. H. (2012). On-line portfolio selection with moving average reversion. *In Proceedings of the 29th International Conference on Machine Learning*, Edinburgh, Scotland, 1–8.
- Li, B. & Hoi, S. C. H. (2015). *Online Portfolio Selection: Principles and Algorithms*. New York, CRC Press.
- Li, B., Hoi, S. C. H. & Gopalkrishnan, V. (2011). Corn: Correlation-driven nonparametric learning approach for portfolio selection. *ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology*, 2(3), 1–29.
- Li, B., Hoi, S. C. H., Zhao, P. & Gopalkrishnan, V. (2013). Confidence weighted mean reversion strategy for online portfolio selection. *ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data*, 7(1), 1–38.
- Li, B., Zhao, P., Hoi, S. C. H. & Gopalkrishnan, V. (2012). PAMR: Passive aggressive mean reversion strategy for portfolio selection. *Machine Learning*, 87(2), 221–258.
- Poterba, J. & Summers, L. (1988). Mean reversion in stock prices: Evidence and implications, *Journal of Financial Economics*, 22(1), 27–59.
- Serletis, A. & Rosenberg, A. A. (2007). Mean reversion in the US stock market. *Chaos, Solitons and Fractals*, 40(4), 2007–2015.
- Tehrani, R., Ansari, H. & Sardan, A. (2008). Investigation on mean reversion phenomenon in Tehran Stock Exchange using variance ratio test. *Journal of Accounting and Auditing reviews*, 15(54), 17-32. (in Persian)
- Vovk, V. G. & Watkins, C. (1998). Universal portfolio selection. *In Proceedings of the 11th annual Conference on Learning Theory*, Wisconsin, USA, 12–23.
- Wang, Y., Wang, D., Wang, Y. & Zhang, Y. (2018). Racorn-K: Risk-Aversion Pattern Matching-Based Portfolio Selection. *Quantitative Finance > Risk Management* [online]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1802.10244> [accessed 28 Feb 2018].
- Zijin, p. (2016). On-Line Portfolio Selection Strategy Based on Weighted Moving Average Asymmetric Mean Reversion. *Management Science and Engineering*, 10(1), 43-48.