تعيين حد پائين واريانس خطاي تخمين براي زاويه سيگنال دريافتي با استفاده از روش CRB در آنتن هاي آرايه اي با دو زيرآرايه جداگانه

حميدرضا بخشي*[1] و آذر محمودزاده[2]
[1]استاديار گروه مهندسي برق - مخابرات دانشگاه شاهد
[2]دانش آموخته كارشناسي ارشد گروه مهندسي برق - مخابرات – دانشگاه شاهد
(تاريخ دريافت ۸۵/۵/۲۲ ، تاريخ دريافت روايت اصلاح شده ۸۶/۵/۲ ، تاريخ تصويب ۸۶/۸/۳۰)

چكيده

در اين مقاله ابتدا حد پايين براي واريانس خطاي تخمين زاويه سيگنال دريافتي در آنتن‌هاي آرايه‌اي با استفاده از روش CRB بررسي مي‌شود. سپس با تعميم آن، واريانس خطاي تخمين زاويه سيگنال دريافتي در آنتن آرايه‌اي با دو زيرآرايه جداگانه محاسبه مي‌گردد. مشاهده مي‌شود كه در يک آرايه، هر چه اندازه آرايه بزرگتر شود، دقت تخمين افزايش مي‌يابد ولي قيمت آرايه و همچنين پيچيدگي سيستم نيز بالا مي‌رود. به همين دليل استفاده از يک آنتن آرايه‌اي با دو زيرآرايه جداگانه پيشنهاد شده است. مشاهده مي‌شود هنگامي كه در يک سيستم مخابراتي نسبت سيگنال به نويز كم باشد، با استفاده از آنتن آرايه‌اي با دو زير آرايه جداگانه مي‌توان مسير سيگنال دريافتي را با دقت خوبي تخمين زد.

واژه هاي كليدي: آنتن آرايه‌اي - واريانس خطاي تخمين - الگوي تشعشع - زاويه سيگنال دريافتي (DOA)[1] - CRB[2]

مقدمه

اولين مسأله در بسياري از سيستمهاي آرايه‌اي مانند رادار، سونار، موبايل، مخابرات ماهواره‌اي و علم نجوم راديويي، تخمين زاويه سيگنال دريافتي باند باريک است. با توجه به پيشرفت روزافزون اين سيستمها، تخمين موقعيت هدف با دقت بالا براي ردیابي در دو دهه اخير مورد توجه فراوان قرار گرفته است. همچنين در نسل سوم مخابرات سيار، انتقال صوت، تصوير و داده‌هاي كامپيوتري با كيفيت بهتر و سرعت بيشتر مطرح است[۱]. به همين دليل در سالهاي اخير روشهاي مختلفي براي تخمين زاويه سيگنال دريافتي ارائه شده كه سعي در افزايش دقت و قابليت جداسازي سيگنالها داشته‌اند.

CRB معين و آماري نقش مهمي را در تخمين پارامترها ايفا مي‌نمايد[۲]. CRB يك حد پايين براي واريانس خطاي تخمين هر تخمين زنندة نااريب[3] است. به دليل اينكه محاسبه CRB ساده است و نيز تحت شرايط خاصي به وسيله تخمين زنندهٔ ML[4] قابل محاسبه مي‌باشد، به طور گسترده مورد استفاده قرار مي‌گيرد[۳]. باندهاي ديگري كه بدين منظور مي‌توانند استفاده شوند، عبارتند از: Weiss-Weinstein [۴]، Ziv-Zakai [۵]و Barankin [۶]. با توجه به اينكه محاسبه اين باندها نسبت به CRB داراي پيچيدگي بيشتري است، كمتر مورد استفاده قرار مي‌گيرند.

در آنتن آرايه‌اي كه متشكل از تعدادي حسگر است، مي‌توان الگوي تشعشع آنتن را به دلخواه تعيين نمود. در نتيجه با دانستن موقعيت كاربر مي‌توانيم الگوي آنتن را به گونه‌اي تغيير دهيم كه سيگنال موردنظر را با بيشترين توان و كمترين تداخل دريافت نماييم. بنابراين روشهايي كه بتوانند به سرعت موقعيت هر كاربر را مشخص نمايند، از اهميت ويژه‌اي برخوردار هستند. روش CRB يک حد پايين از واريانس تخمين را هنگامي كه نتوان تخمين را به صورت دقيق محاسبه نمود، ارائه مي‌دهد. در اين مقاله، CRB براي زاويه سيگنالهاي دريافتي در آنتن آرايه‌اي تعيين مي‌شود.

يكي از پارامترهاي مهم در طراحي آرايه‌ها، اندازه آرايه است. آرايه بزرگ با تعداد زيادي حسگر دقت تخمين DOA را بالا مي‌برد، اما قيمت اين آرايه‌ها با افزايش تعداد حسگرها افزايش مي‌يابد و پيچيدگي محاسباتي نيز زياد مي‌شود. يک راه براي كاهش قيمت با دقت مشابه، كاهش تعداد حسگرها بدون كاهش اندازه آرايه است. در اين روش فاصله بين حسگرها بيشتر از $\lambda/2$ در نظر گرفته

* نويسنده مسئول : تلفن : ۰۹۱۲۱۰۵۷۴۷۲ ، فاكس : ۵۵۲۷۷۵۶۸ ، Email: bakhshi@shahed.ac.ir

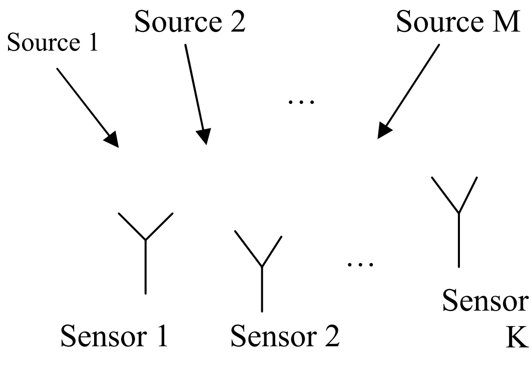
مي‌شود كه باعث ايجاد گلبرگهاي كناري[۵] قوي مي‌گردد[۲]. در نتيجه خطاي تخمين افزايش مي‌يابد. روش پيشنهادي در اين تحقيق، استفاده از دو زير آرايه جداگانه براي افزايش اندازه آرايه، بدون افزايش تعداد المانهاست. در ادامه و در قسمت دوم آنتن‌هاي آرايه‌اي معرفي شده و CRB براي يک آنتن آرايه‌اي بيان مي‌شود. در قسمت سوم آنتن آرايه‌اي با دو زيرآرايه جداگانه ارائه و CRB آن محاسبه مي‌شود. در قسمت‌هاي چهارم و پنجم نيز به ترتيب نتايج شبيه‌سازي و نتيجه‌گيري بيان شده است.

آنتن‌هاي آرايه‌اي

آنتن‌هاي آرايه‌اي به صورت يک مجموعه از آنتن‌ها و يا المان‌هاي آنتن آرايه‌اي است كه بر روي يک صفحه زميني فلزي قرار مي‌گيرند[۷]. شكل(۱)، K حسگر را نشان مي‌دهد كه سيگنال انرژي برگشتي از M منبع نقطه‌اي را دريافت مي‌نمايند. فرض بر اين است كه منابع در فاصله دوري از آرايه‌ها قرار گرفته‌اند. بنابراين موج رسيده به آنتن، صفحه‌اي در نظر گرفته مي‌شود.

فرض بر اين است كه سيگنال ارسالي، يک موج باند باريک حول فركانس حامل است. سيگنال رسيده در ورودي آنتن، $\bar{x}_r(t)$، به صورت زير نشان داده مي‌شود [۸]:

$$\bar{x}_r(t) = \alpha(t)\cos[\omega_c t + \phi(t)] \quad (۱)$$



شكل ۱: مدل K آنتن آرايه‌اي و M منبع نقطه‌اي.

كه در آن $\alpha(t)$، ω_c و $\phi(t)$ به ترتيب دامنه، فركانس حامل و فاز سيگنال دريافتي است. با توجه به سيگنال $\bar{x}_r(t)$، سيگنال $\bar{x}(t)$ (حالت فازور سيگنال $\bar{x}_r(t)$) را به صورت زير تعريف مي‌نماييم:

$$\bar{x}(t) = \alpha(t)e^{j\phi(t)}e^{j\omega_c t} \quad (۲)$$

سيگنال رسيده در هر حسگر به طور جداگانه با ضرب $e^{-j\omega_c t}$ در $\bar{x}(t)$ دمدوله مي‌شود. سيگنال

$$x(t) = \alpha(t)e^{j\phi(t)} \quad (۳)$$

بدست آمده، سيگنال باند پايه است. در نقطه مرجع (نقطه مرجع، براي آرايه‌اي كه داراي تعداد زوج حسگر است، يک نقطه فرضي در وسط آرايه و براي آنتن آرايه‌اي كه داراي تعداد فرد حسگر است، حسگر وسط مي‌باشد.)، سيگنال باند پايه $x(t)$ است. بدون از دست دادن كليت، نقطه مرجع را مكان حسگر اول در نظر مي‌گيريم. خروجي حسگر kام با فرض بدون نويز بودن محيط به صورت زير مدل مي‌شود:

$$y_k(t) = h_k(t) * x(t - \tau_k) \quad (۴)$$

كه $h_k(t)$ پاسخ ضربه حسگر kام، * كانولوشن و τ_k زماني است كه موج از نقطه مرجع به حسگر kام مي‌رسد. اين زمان، تابعي از DOA است.

الگوي تشعشع در حالتي كه گلبرگ اصلي در مسير θ_1 تنظيم شده و سيگنال رسيده به آنتن آرايه‌اي در مسير θ_2 را رديابي مي‌نمايد، به صورت زير بيان مي‌شود[۸]:

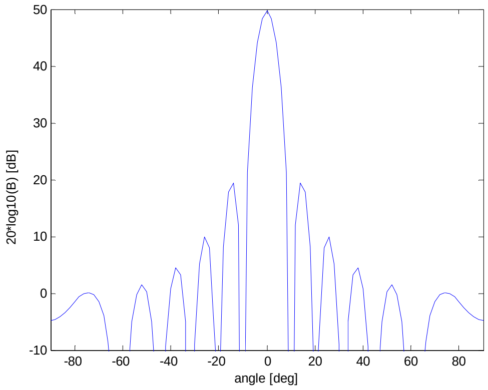
$$B(\theta_1,\theta_2) = \underline{a}_1^H(\theta_1)\underline{a}_1(\theta_2) \quad (۵)$$

كه در آن داريم:

$$\underline{a}_1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-j2\pi\frac{d}{\lambda}\sin\theta} & \dots & e^{-j2\pi(K-1)\frac{d}{\lambda}\sin\theta} \end{bmatrix}^T. \quad (۶)$$

d فاصله بين حسگرها و λ طول موج سيگنال دريافتي است. شكل (۲) دامنه الگوي تشعشع براي يک آرايه خطي يكنواخت (ULA)[۶] با دوازده حسگر را نشان مي‌دهد. همانطور كه مشاهده مي‌شود، الگوي تشعشع شامل يک گلبرگ اصلي در bore sight (زاويه‌اي كه آنتن آرايه‌اي در آن زاويه براي گيرندگي و تشخيص تنظيم شده است.) تعدادي گلبرگ فرعي در كنار گلبرگ اصلي است.

پهناي بيم اصلي، قابليت آرايه را براي جداسازي دو موج صفحه‌اي نشان مي‌دهد.



شكل ۲: الگوي تشعشع آرايه براي يک ULA با دوازده حسگر.

باند Cramer-Rao براي يک آنتن آرايه‌اي

براي بدست آوردن CRB براي مدل دو بعدي از تعميم نتايج [۹] و [۱۰] استفاده مي‌شود. با فرض سيگنال سينوسي و نويز سفيد گوسي، CRB خطاي تخمين براي بردار پارامتر

$$\underline{\eta}=[\omega_1,\ldots,\omega_M,\tilde{b}_1,\ldots,\tilde{b}_M,\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_M,\theta_1,\ldots,\theta_M]^T$$

(۷)

كه در آن ω_i، b_i و θ_i به ترتيب فركانس، دامنه و زاويه سيگنال دريافتي iام و $\tilde{b}_i=\mathrm{Re}[b_i]$ و $\bar{b}_i=\mathrm{Im}[b_i]$ مي‌باشد، برابر است با:

$$E[(\hat{\underline{\eta}}-\underline{\eta}_0)(\hat{\underline{\eta}}-\underline{\eta}_0)^T]\geq G^{-1}$$

(۸)

كه در آن $\hat{\underline{\eta}}$ بردار تخمين و $\underline{\eta}_0$ ميانگين بردار پارامتر $\underline{\eta}$ است. ماتريس فيشر اطلاعات G در رابطه (۸) برابر است با:

$$G=\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{12}^T & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{13}^T & G_{23}^T & G_{33} & G_{34} \\ G_{14}^T & G_{24}^T & G_{34}^T & G_{44} \end{bmatrix}$$

(۹)

كه در آن داريم:

$$G_{mn}=\frac{2}{\sigma^2}\mathrm{Re}\left[X_m^H X_n A^H A\right];\quad m,n=1,2,3$$

(۱۰)

$$G_{m4}=\frac{2}{\sigma^2}\mathrm{Re}\left[X_m^H X A^H D\right];\quad m=1,2,3$$

(۱۱)

$$G_{44}=\frac{2}{\sigma^2}\mathrm{Re}\left[X^H X D^H D\right]$$

(۱۲)

$$A=\left[\underline{a}_1(\theta_1)\ \ \ldots\ \ \underline{a}_1(\theta_M)\right]$$

(۱۳)

$$D=\left[\left.\frac{\partial\underline{a}_1(\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_1}\ \ \ldots\ \ \left.\frac{\partial\underline{a}_1(\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_M}\right]$$

(۱۴)

$$X=\left[\underline{x}_1\ \ \cdots\ \ \underline{x}_M\right]$$

(۱۵)

$$\underline{x}_k=[b_k e^{j\omega_k.1}\ \ \cdots\ \ b_k e^{j\omega_k.N}]^T$$

تعداد پالسهاي دريافتي=N ;

(۱۶)

$$X_1=\left[\frac{\partial\underline{x}_1}{\partial\omega_1}\ \ \cdots\ \ \frac{\partial\underline{x}_M}{\partial\omega_M}\right]$$

(۱۷)

$$X_2=\left[\frac{\partial\underline{x}_1}{\partial\tilde{b}_1}\ \ \cdots\ \ \frac{\partial\underline{x}_M}{\partial\tilde{b}_M}\right]$$

(۱۸)

$$X_3=\left[\frac{\partial\underline{x}_1}{\partial\bar{b}_1}\ \ \cdots\ \ \frac{\partial\underline{x}_M}{\partial\bar{b}_M}\right]$$

(۱۹)

براي تعداد زيادي پالس و حسگر، CRB دو بعدي براي زاويه ورود و فركانس دوپلر منبع kام به صورت زير است[۸]:

$$CRB(\theta_k)=\frac{6\sigma^2}{NK(K^2-1)|b_k|^2}\cdot\frac{1}{\pi^2\cos^2\theta_k}$$

(۲۰)

$$CRB(\omega_k)=\frac{6\sigma^2}{NK(N^2-1)|b_k|^2}$$

(۲۱)

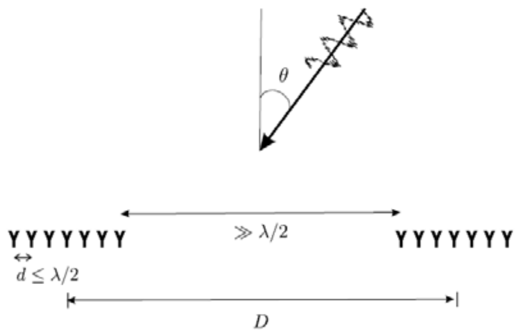
كه در آن N تعداد پالسهاي دريافتي، K تعداد حسگرها، σ^2 واريانس نويز، θ_k زاويه ورود سيگنال دريافتي kام و b_k دامنه سيگنال دريافتي kام مي‌باشد. اثبات رابطه (۲۰) در ضميمه (الف) ذكر شده است و رابطه (۲۱) نيز مشابه رابطه (۲۰) اثبات مي‌شود.

آنتن آرايه‌اي با دو زيرآرايه جداگانه

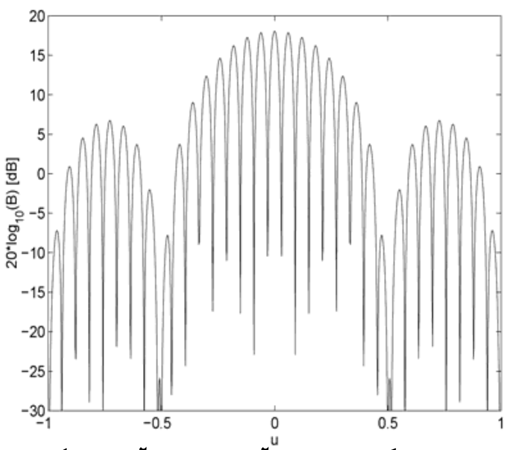
يكي از پارامترهاي مهم در طراحي آرايه‌ها، اندازه آرايه است. آرايه بزرگ با تعداد زيادي حسگر، دقت

تخمين DOA را بالا مي‌برد. اما قيمت اين آرايه‌ها با افزايش تعداد حسگرها افزايش مي‌يابد و همچنين پيچيدگي محاسباتي نيز زياد مي‌شود. راه حل پيشنهادي براي كاهش قيمت با دقت مشابه، كاهش تعداد حسگرها بدون كاهش اندازه آرايه است.

آرايه پيشنهادي در اين تحقيق از دو زيرآرايه جدا از هم تشكيل شده است. مطابق شكل (۳) فاصله بين مراكز دو زيرآرايه D است و يک فاصله بزرگ نسبت به فاصله بين حسگرها بين دو زير آرايه، وجود دارد. در نتيجه اندازه آرايه افزايش مي‌يابد. اين امر باعث به وجود آمدن گلبرگهاي كناري قوي در الگوي تشعشعي مي‌شود كه دامنه آنها به گلبرگ اصلي نزديک است و در نتيجه باعث ايجاد ابهام مي‌گردد. هر زيرآرايه يک آرايه خطي يكنواخت است كه فاصله بين حسگرها $d \le \lambda / 2$ مي‌باشد كه در آن λ طول موج سيگنال دريافتي است.



شكل ۳: الگوي تشعشع آرايه براي دو زيرآرايه جداگانه.



شكل ۴: الگوي تشعشع آرايه با دو زيرآرايه جداگانه $u = \sin\theta$.

الگوي تشعشع آرايه خطي با دو زير آرايه جداگانه در شكل(۴) نشان داده شده است. اين الگو از حاصلضرب فاكتور آرايه و الگوي تشعشع زيرآرايه تشكيل شده است. فاكتور آرايه، الگوي تشعشع است كه از دو حسگر مثل هم كه در مركز زيرآرايه قرار دارند تشكيل مي‌شود. اين الگوي تشعشعي داراي گلبرگهاي كناري به اندازه گلبرگ اصلي است. زيرآرايه‌ها باعث كاهش گلبرگهاي كناري مي‌شوند كه به وسيله ضرب فاكتور آرايه در الگوي تشعشع زيرآرايه حاصل مي‌شود. فاصله بين گلبرگهاي كناري، $1 / D_n = \lambda / D$ است.

لازم به ذكر است در حالتي كه آنتن آرايه‌اي داراي بيش از دو زيرآرايه مي‌باشد، مي‌بايست الگوي تشعشع آنتن آرايه‌اي براي تخمين DOA به طور كامل مورد بررسي قرار گيرد.

CRB در آنتن‌هاي آرايه‌اي با دو زيرآرايه جداگانه

در آنتن آرايه‌اي با دو زير آرايه، دو CRB متفاوت[۸] براي بررسي عملكرد مدهاي متفاوت وجود دارد. بالاي آستانه ابهام، داده‌ها در زيرآرايه به طور منطقي (XOR) با يكديگر تركيب مي‌شوند تا تخمين DOA بر اساس تمام روزنه بدست آيد. در اين حالت CRB همبسته ناميده مي‌شود و با B_c مشخص مي‌شود. زير آستانه ابهام، داده‌ها در زيرآرايه به طور جبري با يكديگر جمع مي‌شوند. در اين حالت CRB ناهمبسته ناميده مي‌شود و با B_I مشخص مي‌شود.

CRB بر پايه مدل سيگنال گوسي استخراج شده است. B_c براي سيگنال دريافتي به صورت زير بيان مي‌شود[۱۱]:

$$B_C = \frac{1}{2NS^2 \underline{d}^H P_a^{\perp} \underline{d}\, \underline{a}^H R^{-1} \underline{a}} \qquad (۲۲)$$

كه در آن، S نسبت سيگنال به نويز، N تعداد پالسهاي دريافتي و

$$\underline{d} \stackrel{\Delta}{=} \frac{\partial \underline{a}(\theta)}{\partial u} \qquad (۲۳)$$

$$P_a^{\perp} = I - \underline{a}\,\underline{a}^H / \underline{a}^H \underline{a} = I - \frac{1}{2K} \underline{a}\,\underline{a}^H \qquad (۲۴)$$

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} \underline{a}_1(\theta) \\ e^{-j2\pi D_n u} \underline{a}_1(\theta) \end{bmatrix} \qquad (۲۵)$$

$$R = S\, \underline{a}(u)\, \underline{a}^H(u) + I \qquad (۲۶)$$

که $u=\sin\theta$ و I ماتريس واحد $2K\times 2K$ است. اگر بردار $\underline{b}$ را به صورت زير تعريف نماييم:

$$\underline{b} \overset{\Delta}{=} [0 \quad d_n \quad \cdots \quad (K-1)d_n \quad D_n \quad D_n+d_n \cdots \quad D_n+(K-1)d_n]$$

(۲۷)

که در آن $d_n=d/\lambda$ است، بردار $\underline{d}$ به صورت زير قابل محاسبه است:

$$\underline{d}=-j2\pi\underline{b}\Theta\underline{a}$$

(۲۸)

که $\underline{b}\Theta\underline{a}$ ضرب هادامارد[1]

([1] $\underline{a}=[a_1 \quad a_2\cdots a_n]$; $\underline{b}=[b_1 \quad b_2\cdots b_n]$; $\underline{c}=[c_1 \quad c_2\cdots c_n]$)

$\underline{c}=\underline{b}\Theta\underline{a}:\quad c_i=b_ia_i$

بردارهاي $\underline{a}$ و $\underline{b}$ مي‌باشد. اگر عناصر $\underline{b}$ را b_k نام گذاري نماييم، داريم:

$$\underline{d}^H P_a^{\perp}\underline{d}=4\pi^2(\underline{b}^T\Theta\underline{a}^H)(\underline{b}\Theta\underline{a})$$

(۲۹)

$$-2\frac{\pi^2}{K}(\underline{b}^T\Theta\underline{a}^H)\underline{a}\underline{a}^H(\underline{b}\Theta\underline{a})$$
$$=4\pi^2\sum_{k=1}^{2K}b_k^2-\frac{2\pi^2}{K}(\sum_{k=1}^{2K}b_k)^2$$
$$=\frac{2\pi^2}{3}K(d_n^2(K-1)+3D_n^2)$$

با استفاده ازلم معكوس ماتريس خواهيم داشت:

$$R^{-1}=I-\frac{S}{1+2SK}\underline{a}\underline{a}^H$$

(۳۰)

و در نتيجه

$$\underline{a}^H R^{-1}\underline{a}=2K-\frac{S}{1+2SK}\underline{a}^H\underline{a}\underline{a}^H\underline{a}=\frac{2K}{1+2SK}$$

(۳۱)

با جايگذاري معادلات (۲۹) و (۳۱) در معادله (۲۲) داريم:

$$B_C=\frac{3(2SK+1)}{8\pi^2NS^2K^2(d_n^2(K^2-1)+3D_n^2)}$$

(۳۲)

اگر $2KS>>1$ و $K^2>>1$ باشد، معادله (۳۲) به صورت زير ساده مي‌شود:

$$B_C\approx\frac{3}{4\pi^2NKS\left(d_n^2K^2+3D_n^2\right)}$$

(۳۳)

همانگونه که مشاهده مي‌شود، CRB همبسته با پارامترهاي N، K، S، d_n و D_n نسبت عكس دارد. CRB ناهمبسته براي آنتن آرايه‌اي با دو زيرآرايه جداگانه برابر است با[۱۱]:

$$B_I=\frac{1}{4NS^2\underline{d}_1^H P_{a_1}^{\perp}\underline{d}_1\underline{a}_1^H R^{-1}\underline{a}_1}$$

(۳۴)

که در آن داريم:

$$\underline{d}_1=\frac{\partial\underline{a}_1(\theta)}{\partial u}=-j2\pi\underline{b}_1\Theta\underline{a}_1$$

(۳۵)

$$\underline{b}_1=[0 \quad d_n \quad \ldots \quad (K-1)d_n]$$

(۳۶)

$$\underline{a}_1(\theta)=\left[1 \quad e^{-j2\pi\frac{d}{\lambda}\sin\theta} \quad \ldots \quad e^{-j2\pi(K-1)\frac{d}{\lambda}\sin\theta}\right]^T$$

(۳۷)

$$P_{a_1}^{\perp}=I-\underline{a}_1\underline{a}_1^H/\underline{a}_1^H\underline{a}_1=I-\frac{1}{2K}\underline{a}_1\underline{a}_1^H$$

(۳۸)

مشابه با روش CRB همبسته بدست مي‌آوريم:

$$\underline{d}_1^H p_{a_1}\underline{d}_1=4\pi\sum_{k=1}^{K}b_{1k}^2-\frac{2\pi^2}{K}\left(\sum_{k=1}^{K}b_{1k}\right)^2$$
$$=\frac{\pi^2d_n^2K(K^2-1)}{3}$$

(۳۹)

و

$$\underline{a}_1^H R^{-1}\underline{a}_1=\frac{K}{1+KS}$$

(۴۰)

در نتيجه داريم:

$$B_I=\frac{3(SK+1)}{4\pi^2d_n^2NS^2K^2(K^2-1)}$$

(۴۱)

اگر $1>>2KS$ و $K^2>>1$ باشد، معادله (۴۱) به صورت زير ساده مي‌شود:

$$B_I\approx\frac{3}{4\pi^2d_n^2NSK^3}$$

(۴۲)

همانگونه که مشاهده مي‌شود، CRB ناهمبسته با پارامترهاي N، K، S و d_n نسبت عكس دارد. با مقايسه روابط (۳۳) و (۴۲) مشاهده مي‌شود كه CRB ناهمبسته با ضريب $1+3D_n^2/d_n^2K^2$ بيشتر از CRB همبسته است. اگر $3D_n^2/d_n^2K^2>>1$ باشد، ضريب بالا به صورت $3D_n^2/d_n^2K^2$ بدست مي‌آيد. اين بدين معني است كه اگر S (نسبت سيگنال به نويز) به اندازه كافي براي ناديده

گرفتن خطاي ابهام بزرگ باشد، واريانس خطاي تخمين به مقدار ضريب $3D_n^2/d_n^2K^2$، کاهش مي‌يابد.

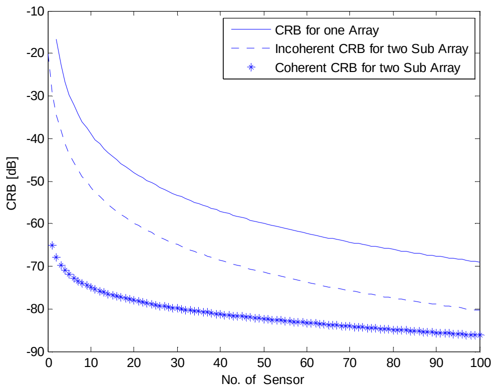
نتايج شبيه‌سازي

در اين مقاله ابتدا شبيه‌سازي براي يک آنتن آرايه‌اي و يک آنتن آرايه‌اي با دو زيرآرايه جداگانه به ازاي تعداد حسگرهاي متفاوت، براي حالتي که تعداد پالسهاي دريافتي برابر با شانزده است، انجام شده است و CRB براي آنتن آرايه‌اي و CRB همبسته و CRB ناهمبسته براي آنتن آرايه‌اي با دو زيرآرايه جداگانه محاسبه شده است. در اين شبيه‌سازي S=2، $d_n = 0.5$، $D_n = 50$ و $\sigma = 1$ در نظر گرفته شده است. هم چنين فرض بر اين است که زاويه ورود، θ_k، برابر با $\pi/9$ است. نتايج شبيه‌سازي در شکل (۵) نشان داده شده است.

سپس شبيه‌سازي براي يک آنتن آرايه‌اي و يک آنتن آرايه‌اي با دو زيرآرايه جداگانه به ازاي تعداد پالسهاي دريافتي متفاوت، براي حالتي که تعداد المان آنتن‌ها، شانزده است، انجام شده است. در اين قسمت نيز CRB براي آنتن آرايه‌اي و CRB همبسته و CRB ناهمبسته براي آنتن آرايه‌اي با دو زيرآرايه جداگانه محاسبه شده است. شکل (۶) نتايج شبيه‌سازي را نشان مي‌دهد.

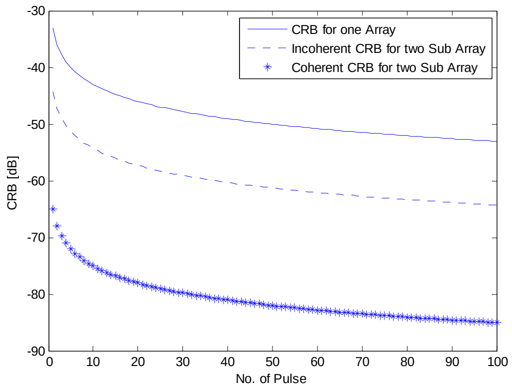
در حالت بعد، شبيه‌سازي براي يک آنتن آرايه‌اي و يک آنتن آرايه‌اي با دو زيرآرايه جداگانه به ازاي SNR هاي متفاوت، براي حالتي که تعداد المان آنتن‌ها و تعداد پالسهاي دريافتي، شانزده است، صورت گرفته و CRB براي آنتن آرايه‌اي و CRB همبسته و CRB ناهمبسته براي آنتن آرايه‌اي با دو زيرآرايه جداگانه محاسبه شده است. نتايج شبيه‌سازي در شکل (۷) مشاهده مي‌شود.

در نهايت، شبيه‌سازي براي آنتن آرايه‌اي با دو زيرآرايه جداگانه براي حالتي که فاصله بين المانهاي زيرآرايه تغيير مي‌نمايد، صورت گرفته و CRB همبسته و CRB ناهمبسته به ازاي تعداد المان آنتن و تعداد پالسهاي دريافتي برابر با شانزده محاسبه شده است. نتايج شبيه‌سازي در شکل (۸) مشاهده مي‌شود. شکل (۹) نيز بيان کننده حالتي است که فاصله بين مراکز دو زيرآرايه تغيير مي‌نمايد. با توجه به رابطه (۴۲) واضح است که CRB ناهمبسته مستقل از فاصله بين مراکز دو زيرآرايه است. لذا در شکل (۹) تنها CRB همبسته رسم شده است.



شکل ۵ : واريانس خطاي تخمين در آنتن آرايه‌اي و آنتن آرايه‌اي با دو زيرآرايه برحسب تعداد حسگرها

$S = 2, d_n = 0.5, D_n = 50, \sigma = 1, N = 16$.

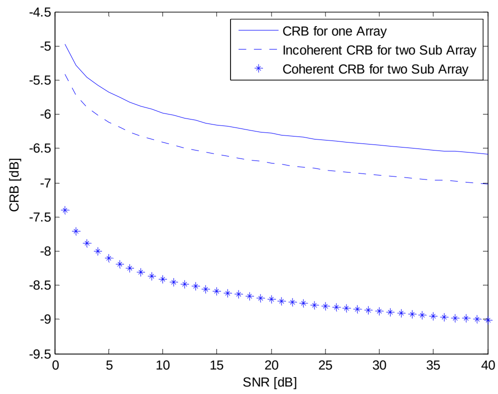


شکل ۶ : واريانس خطاي تخمين در آنتن آرايه‌اي و آنتن آرايه‌اي با دو زيرآرايه برحسب تعداد پالس دريافتي

$S = 2, d_n = 0.5, D_n = 50, \sigma = 1, K = 16$.

با توجه به شکلهاي (۵) و (۶) مشاهده مي‌شود که با افزايش اندازه آرايه، افزايش تعداد پالسهاي دريافتي و تبديل آنتن آرايه‌اي به يک آنتن آرايه‌اي با دو زيرآرايه جداگانه، حد پايين واريانس خطاي تخمين به طور چشمگيري کاهش مي‌يابد. همچنين حد پايين واريانس خطاي تخمين براي CRB همبسته نسبت به CRB ناهمبسته کمتر است. هم چنين با توجه به شکل (۷) مشاهده مي‌شود که هر چه نسبت SNR بيشتر شود، حد پايين واريانس خطاي تخمين کاهش مي‌يابد. با توجه به شکلهاي (۸) و (۹) مشاهده مي‌شود که افزايش فاصله بين حسگرها و مرکز دو زيرآرايه به علت افزايش اندازه آنتن آرايه‌اي، باعث کاهش حد پايين واريانس خطاي تخمين مي‌گردد. افزايش فاصله بين حسگرها بيشتر از مقدار λ باعث ايجاد ابهام در امر تخمين مي‌گردد. با توجه به رابطه (۴۲) CRB ناهمبسته مستقل از فاصله بين مراکز دو زيرآرايه است.

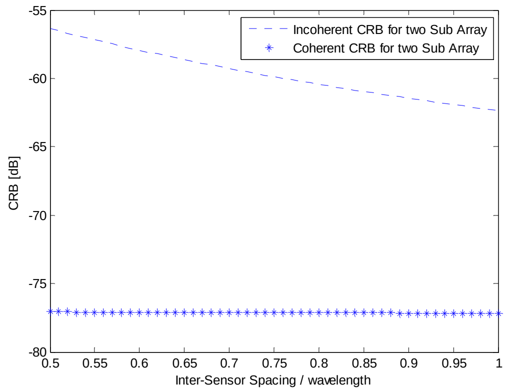
با توجه به روابط (۳۳) و (۴۲) مشاهده مي‌شود که CRB همبسته و CRB ناهمبسته با تعداد المانهاي آنتن، تعداد پالسهاي دريافتي، نسبت سيگنال به نويز، فاصله بين حسگرها و فاصله بين مراکز دو زير آرايه نسبت عکس دارند و به همين دليل حد پايين واريانس خطاي تخمين مشاهده شده در شکلهاي (۵) الي (۹) با افزايش تعداد المانهاي آنتن، تعداد پالسهاي دريافتي، نسبت سيگنال به نويز، فاصله بين حسگرها و فاصله بين مراکز دو زيرآرايه کاهش مي‌يابد. همچنين با توجه به رابطه (۲۰) مشاهده مي‌شود که CRB در يک آنتن آرايه‌اي با تعداد المانهاي آنتن، تعداد پالسهاي دريافتي و نسبت سيگنال به نويز نسبت عکس دارد و به همين دليل حد پايين واريانس خطاي تخمين مشاهده شده در شکلهاي (۵)، (۶)و (۷) با افزايش تعداد المانهاي آنتن، تعداد پالسهاي دريافتي و نسبت سيگنال به نويز کاهش مي‌يابد. همچنين تبديل آنتن آرايه‌اي به آنتن آرايه‌اي با دو زير آرايه جداگانه، به علت افزايش سايز آرايه باعث کاهش حد پايين واريانس خطاي تخمين مي‌گردد.



شکل ۷ : واريانس خطاي تخمين در آنتن آرايه‌اي و آنتن آرايه‌اي با دو زيرآرايه جداگانه بر حسبSNR

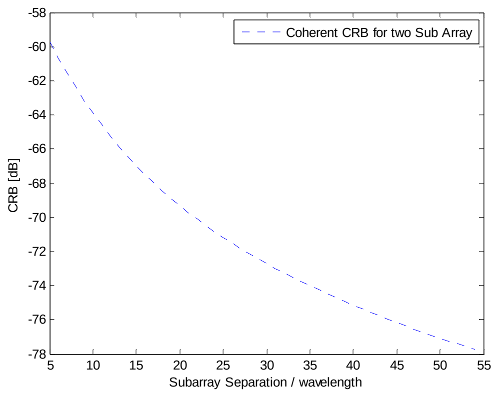
، $d_n = 0.5, D_n = 50, \sigma = 1, N = 16, K = 16$

تنها مشکل استفاده از آنتن‌هاي آرايه‌اي با دو زيرآرايه جداگانه، فاصله بين مرکز دو زيرآرايه است که $D >> \lambda/2$ است. اين امر سبب ايجاد گلبرگ‌هاي اصلي مي‌گردد که اين گلبرگ‌هاي اصلي باعث ايجاد خطاي زياد در تخمين مي‌گردد. يک راه براي بالا بردن دقت تخمين DOA با يک آرايه که داراي چنين ساختاري مي‌باشد، آن است که فاصله بين مراکز زيرآرايه بزرگ شود. زيرآرايه‌ها به طور جداگانه تعيين مي‌کنند که کدام يک از پيک‌ها در الگوي تشعشع صحيح مي‌باشد.



شکل ۸ : واريانس خطاي تخمين در آنتن آرايه‌اي با دو زيرآرايه جداگانه بر حسب فاصله بين المان‌هاي زيرآرايه

، $S = 2, d_n = 0.5, D_n = 50, \sigma = 1, N = 16, K = 16$



شکل ۹ : واريانس خطاي تخمين در آنتن آرايه‌اي با دو زيرآرايه جداگانه بر حسب فاصله بين مراکز دو زيرآرايه

، $S = 2, d_n = 0.5, D_n = 50, \sigma = 1, N = 16, K = 16$

نتيجه‌گيري

در اين تحقيق، آنتن آرايه‌اي با آرايه‌هاي با فاصله مساوي از يکديگر به دو زير آرايه تعميم يافته است. با اين کار حد پايين واريانس خطاي تخمين کاهش يافته و در نتيجه دقت تخمين افزايش يافته است. علت اين امر آن است که بدون افزايش تعداد المان‌هاي آرايه، اندازه آرايه افزايش يافته است. با توجه به شکلهاي (۸) و (۹) مشاهده مي‌شود که هر چه فاصله بين دو زيرآرايه و المان‌هاي آنتن افزايش يابد، واريانس خطاي تخمين کاهش مي‌يابد. البته بايد توجه داشت که فاصله بين المان‌هاي آنتن نبايد از λ بيشتر گردد، زيرا اين امر باعث به وجود آمدن ابهام در امر تخمين و افزايش گلبرگ‌هاي فرعي مي‌گردد. بر اساس شکلهاي (٤) و (۹) مشاهده مي‌شود که افزايش اندازه آرايه، سبب ايجاد گلبرگ‌هاي کناري قوي مي‌گردد ولي در نهايت افزايش دقت تخمين را به همراه دارد. در

كاربردهاي عملي افزايش اندازه آرايه بدون افزايش تعداد المان‌ها باعث كاهش قابل توجه هزينه مصرفي مي‌شود. در نتيجه به كار بردن اين نوع آرايه براي تخمين زاويه سيگنال دريافتي و در نتيجه ردیابي هدف در مخابرات سيار پيشنهاد مي‌شود؛ زيرا با وجود SNR كم، اين نوع از آنتن‌هاي آرايه‌اي قادر به ردیابي هدف با دقت بالا مي‌باشند.

ضميمه (الف)

براي اثبات رابطه (۲۰) ابتدا به بررسي ماتريس فيشر G زماني كه $K \to \infty$ و مقدار N ثابت است، مي‌پردازيم. به علت اينكه المان‌ها در زير ماتريس‌هاي مختلف G_{mn} در ماتريس فيشر با K افزايش مي‌يابد، نياز است كه ماتريس G به بخش‌هايي تقسيم شود كه هر كدام از اين بخش‌ها به طور جداگانه نرماليزه شده و هنگامي كه $K \to \infty$ رفتار يكساني نشان دهند. بنابراين داريم:

$$G = \begin{bmatrix} \Phi & \Delta \\ \Delta^T & G_{44} \end{bmatrix} \qquad \text{(الف-۱)}$$

كه در آن

$$\Delta = \begin{bmatrix} G_{14} \\ G_{24} \\ G_{34} \end{bmatrix} \text{ و } \Phi = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{12}^T & G_{22} & G_{23} \\ G_{13}^T & G_{23}^T & G_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{(الف-۲)}$$

بدين ترتيب ماتريس CRB براي DOAها به صورت زير محاسبه مي‌شود:

$$CRB(\theta) = (G_{44} - \Delta^T \Phi^{-1} \Delta)^{-1} \qquad \text{(الف-۳)}$$

حال به بررسي رفتار ماتريس G هنگامي كه $K \to \infty$ مي‌پردازيم. با توجه به رابطه (۱۰) بلوك‌هاي G_{mn} در ماتريس Φ و G_{44} براي مقادير زياد K قطري مي‌گردد. اين در حالي است كه المان‌هاي قطر با نسبت K^3 افزايش مي‌يابند. همچنين بلوك‌هاي G_{m4} در Δ نيز براي مقادير زياد K قطري مي‌گردد. در اين حالت المان‌هاي قطر با نسبت K^2 افزايش مي‌يابند. بنابراين داريم:

$$\overline{CRB}(\theta) \stackrel{\Delta}{=} \lim_{K\to\infty} K^3 . CRB(\theta) = \qquad \text{(الف-۴)}$$

$$\lim_{K\to\infty}\left(\frac{1}{K^3} G_{44} - \frac{1}{K^2}\Delta^T \left(\frac{1}{K}\Phi\right)^{-1} \frac{1}{K^2}\Delta \right)^{-1}$$

حال ماتريس‌هاي $\overline{\Phi}$، $\overline{\Delta}$ را به صورت زير تعريف مي‌نماييم:

$$\overline{\Phi} = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K}\Phi = \begin{bmatrix} \overline{G}_{11} & \overline{G}_{12} & \overline{G}_{13} \\ \overline{G}_{12}^T & \overline{G}_{22} & \overline{G}_{23} \\ \overline{G}_{13}^T & \overline{G}_{23}^T & \overline{G}_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{(الف-۵)}$$

$$\overline{\Delta} = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K^2}\Delta = \begin{bmatrix} \overline{G}_{14} \\ \overline{G}_{24} \\ \overline{G}_{34} \end{bmatrix} \qquad \text{(الف-۶)}$$

كه در آن داريم:

$$\overline{G}_{mn} = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K} G_{mn}; \quad m,n = 1,2,3 \qquad \text{(الف-۷)}$$

$$\overline{G}_{m4} = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K^2} G_{m4}; \quad m = 1,2,3 \qquad \text{(الف-۸)}$$

بدين ترتيب رابطه (الف-۴) به صورت زير نوشته مي‌شود:

$$\overline{CRB}(\theta) = \left(\overline{G}_{44} - \overline{\Delta}^T \overline{\Phi}^{-1} \overline{\Delta}\right)^{-1} \qquad \text{(الف-۹)}$$

براي محاسبه $\overline{CRB}$ نياز به محاسبه $\overline{\Phi}^{-1}$ مي‌باشد كه با توجه به [۸] داريم:

$$\left[\overline{\Delta}' \, \overline{\Phi}^{-1} \overline{\Delta}\right]_{kk} = g_{14}(g_{14}\psi_{11} + g_{24}\psi_{12} + g_{34}\psi_{13})$$
$$+ g_{24}(g_{14}\psi_{12} + g_{24}\psi_{22} + g_{34}\psi_{23})$$
$$+ g_{34}(g_{14}\psi_{13} + g_{24}\psi_{23} + g_{34}\psi_{33}) \qquad \text{(الف-۱۰)}$$

كه در آن داريم:

$$\psi_{11} = \frac{1}{g_{11} - \frac{g_{12}^{\,2}}{g_{22}} - \frac{g_{13}^{\,2}}{g_{33}}} \qquad \text{(الف-۱۱)}$$

$$\psi_{12} = -\frac{1}{g_{22} - g_{12} - \frac{g_{22} g_{13}^{\,2}}{g_{12} g_{33}}} \qquad \text{(الف-۱۲)}$$

$$\psi_{13} = -\frac{1}{\frac{g_{33} g_{11}^{\,2}}{g_{13}} - \frac{g_{33} g_{12}^{\,2}}{g_{13} g_{22}} - g_{13}} \qquad \text{(الف-۱۳)}$$

$$\psi_{22} = \frac{1}{g_{22}} + \frac{1}{\frac{g_{22}^{\,2} g_{11}}{g_{12}^{\,2}} - g_{22} - \frac{g_{22}^{\,2} g_{13}^{\,2}}{g_{12}^{\,2} g_{33}}} \qquad \text{(الف-۱۴)}$$

$$\psi_{23} = \frac{1}{\frac{g_{11} g_{22} g_{33}}{g_{12} g_{13}} - \frac{g_{12} g_{33}}{g_{13}} - \frac{g_{22} g_{13}}{g_{12}}} \qquad \text{(الف-۱۵)}$$

$$\psi_{33} = \frac{1}{g_{33}} + \frac{1}{\frac{g_{33}^{\,2} g_{11}}{g_{13}^{\,2}} - \frac{g_{12}^{\,2} g_{33}^{\,2}}{g_{13}^{\,2} g_{22}} - g_{33}} \qquad \text{(الف-۱۶)}$$

$$g_{11}^{K}=\frac{N(2N+1)(N+1)}{3\sigma^2}\left|b_K\right|^2\alpha_K \qquad \text{(الف-۱۷)}$$

$$g_{12}^{K}=-\frac{N(N+1)}{\sigma^2}\bar{b}_K\alpha_K \qquad \text{(الف-۱۸)}$$

$$g_{13}^{K}=\frac{N(N+1)}{\sigma^2}\tilde{b}_K\alpha_K \qquad \text{(الف-۱۹)}$$

$$g_{22}^{K}=\frac{2N}{\sigma^2}\alpha_K \qquad \text{(الف-۲۰)}$$

$$g_{23}^{K}=0 \qquad \text{(الف-۲۱)}$$

$$g_{33}^{K}=\frac{2N}{\sigma^2}\alpha_K \qquad \text{(الف-۲۲)}$$

$$g_{14}^{K}=\frac{N(N+1)}{\sigma^2}\left|b_k\right|^2\bar{\beta}_k \qquad \text{(الف-۲۳)}$$

$$g_{24}^{k}=\frac{2N}{\sigma^2}(\tilde{b}_k\tilde{\beta}_k-\bar{b}_k\bar{\beta}_k) \qquad \text{(الف-۲۴)}$$

$$g_{34}^{k}=\frac{2N}{\sigma^2}(\bar{b}_k\tilde{\beta}_k+\tilde{b}_k\bar{\beta}_k) \qquad \text{(الف-۲۵)}$$

$$g_{44}^{k}=\frac{2}{\sigma^2}N\left|b_k\right|^2\gamma_k \qquad \text{(الف-۲۶)}$$

$$\alpha_K=\lim_{K\to\infty}\frac{1}{K}a^H(\theta_K)a(\theta_K) \qquad \text{(الف-۲۷)}$$

$$\beta_k=\lim_{K\to\infty}\frac{1}{K^2}a^H(\theta_K)d(\theta_K) \qquad \text{(الف-۲۸)}$$

$$\gamma_k=\lim_{K\to\infty}\frac{1}{K^3}d^H(\theta_K)d(\theta_K) \qquad \text{(الف-۲۹)}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\left[\overline{CRB}(\theta)\right]_{KK}=\lim_{K\to\infty}K^3\frac{\sigma^2}{2N\left|b_k\right|^2\left\|P_{a_K}^{\perp}d_k\right\|^2} \qquad \text{(الف-۳۰)}$$

و در نهایت براي مقدار $K\to\infty$ داریم:

$$CRB(\theta_k)=\frac{\sigma^2}{2N\left|b_k\right|^2\left\|P_{a_K}^{\perp}d_k\right\|^2} \qquad \text{(الف-۳۱)}$$

با جایگذاري روابط (۲۳) و (۲۴) در رابطه (الف-۳۱) به رابطه (۲۰) مي رسیم.

حال به بررسي ماتریس فیشر G زماني که $N\to\infty$ و مقدار K ثابت است، ميپردازیم. به علت اینکه رفتار زیر ماتریس‌ها در هنگام افزایش N متفاوت از افزایش K مي‌باشد، بخش‌بندي و نرمالیزاسیون ماتریس G به نحو دیگري انجام مي‌گیرد. در این حالت داریم:

$$G=\begin{bmatrix}G_{11} & \Lambda\\ \Lambda^T & \Gamma\end{bmatrix} \qquad \text{(الف-۳۲)}$$

که در آن داریم:

$$\Gamma=\begin{bmatrix}G_{22} & G_{23} & G_{24}\\ G_{23}^T & G_{33} & G_{34}\\ G_{24}^T & G_{34}^T & G_{44}\end{bmatrix} \qquad \text{(الف-۳۳)}$$

$$\Lambda=\begin{bmatrix}G_{12} & G_{13} & G_{14}\end{bmatrix}$$

بدین ترتیب ماتریس CRB براي DOAها به صورت زیر محاسبه مي‌شود:

$$CRB(\theta)=(\Gamma-\Lambda^T G_{11}^{-1}\Lambda)^{-1} \qquad \text{(الف-۳۴)}$$

حال به بررسي رفتار ماتریس G هنگامي که $N\to\infty$ مي‌پردازیم. در این حالت نیز G_{mn} براي مقادیر زیاد K قطري مي‌گردد. این در حالي است که المان‌هاي قطري Γ با نسبت N ، Λ با نسبت N^2 و G_{11} با نسبت N^3 افزایش مي‌یابند. در نتیجه داریم:

$$\overline{CRB}(\theta)\overset{\Delta}{=}\lim_{N\to\infty}N.CRB(\theta)= \qquad \text{(الف-۳۵)}$$

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}\Gamma-\frac{1}{N^2}\Lambda^T\left(\frac{1}{N^3}G_{11}\right)^{-1}\frac{1}{N^2}\Lambda\right)^{-1}$$

ماتریس‌هاي $\bar{\Gamma}$، $\bar{\Lambda}$ را به صورت زیر تعریف مي‌نماییم:

$$\bar{\Gamma}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\Gamma=\begin{bmatrix}\bar{G}_{22} & \bar{G}_{23} & \bar{G}_{24}\\ \bar{G}_{23}^T & \bar{G}_{33} & \bar{G}_{34}\\ \bar{G}_{24}^T & \bar{G}_{34}^T & \bar{G}_{44}\end{bmatrix} \qquad \text{(الف-۳۶)}$$

$$\bar{\Lambda}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}\Lambda=\begin{bmatrix}\bar{G}_{12} & \bar{G}_{13} & \bar{G}_{14}\end{bmatrix} \qquad \text{(الف-۳۷)}$$

که در آن داریم:

$$\bar{G}_{mn}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}G_{mn};\quad m,n=1,2,3 \qquad \text{(الف-۳۸)}$$

$$\bar{G}_{1n}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}G_{1n};\quad m=1,2,3 \qquad \text{(الف-۳۹)}$$

$$\bar{G}_{11}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^3}G_{11};\quad m=1,2,3 \qquad \text{(الف-۴۰)}$$

بدین ترتیب رابطه (الف-۳۵) به صورت زیر نوشته مي‌شود:

$$\overline{CRB}(\theta)=\left(\bar{\Gamma}-\bar{\Lambda}^T\bar{G}_{11}^{-1}\bar{\Lambda}\right)^{-1} \qquad \text{(الف-۴۱)}$$

براي محاسبه $\overline{CRB}$ نیاز به محاسبه $\bar{\Gamma}^{-1}$ مي‌باشد که با توجه به [8] داریم:

(الف-۴۲)

$$\left[\bar{\Lambda}\bar{\Gamma}^{-1}\bar{\Lambda}^T\right]_{kk}=\frac{g_{14}^2g_{22}g_{33}-2g_{12}g_{14}g_{24}g_{33}+2g_{13}g_{34}(g_{12}g_{24}-g_{14}g_{22})}{g_{22}(g_{33}g_{44}-g_{34}^2)-g_{24}^2g_{33}}+\frac{g_{13}^2(g_{22}g_{44}-g_{24}^2)+g_{12}^2(g_{33}g_{44}-g_{34}^2)}{g_{22}(g_{33}g_{44}-g_{34}^2)-g_{24}^2g_{33}}$$

و در نتیجه داریم:

$$\left[\overline{CRB}(\theta)\right]_{KK}=\frac{\sigma^2}{2\left|b_k\right|^2\left\|P_{a_K}^{\perp}d_k\right\|^2} \qquad \text{(الف-۴۳)}$$

هنگامي كه $N \to \infty$ خواهيم داشت:

$$CRB(\theta_k) = \frac{\sigma^2}{2N|b_k|^2 \left\|P_{a_K}^{\perp} d_k\right\|^2} \quad \text{(الف-۴۴)}$$

در نتيجه رابطه يكساني با رابطه (الف-۳۱) داريم كه با جايگذاري روابط (۲۳) و (۲۴) در رابطه (الف-۴۴) به رابطه (۲۰) مي‌رسيم.

مراجع

1 - Thomas, N. J. and Cruickshank, D. G. M. (1999). "A passive mobile location system for UMTS." *IEE Colloquium on UMTS Terminal and Software Radio,* PP. 10/1-10/6.

2 - Delmas, J. (2004). "Stochastic cramer-rao bound for noncircular signal with application to DOA estimation." *IEEE Trans. on Signal Processing,* Vol. 52, No. 11, PP. 743-754.

3 - Athley, F. (2005). "Threshold Region Performance of Maximum Likelihood direction of arrival estimators." *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol.53, No. 4, PP. 1359-1373.

4 - Weiss, A. and Weinstein, E. (1985). "A lower bound on the mean-square error in random parameter estimation." *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 31, No. 5, PP. 680-682.

5 - Ziv, J. and Zakai, M. (1969). "Some lower bounds on signal parameter estimation." *IEEE Trans. on Information Theory,* Vol. 15, No. 3, PP. 386-391.

6 - Barankin, E. W. (1949). "Locally best unbiased estimation." *Annual Math. Statist.,* Vol. 20, No. 5, PP. 477-501.

7 - Wirth, W. (2001). "Radar techniques using array antennas." *IEE Press.*

8 - Athley, F. (2001). *Angle and frequency estimation using sensor arrays.* MSc. Thesis, Charlmers University of Technology, Sweden. (db.s2.chalmers.se/download/theses/lic_370L.pdf)

9 - Eriksson, J. (1996). *Aspects on parameter estimation and data reduction in doppler radar*. BSc. Thesis, Department of Signals and Systems, Chalmers University of Technology, Sweden.

10 - Abeida, H. and Delmas, J. (2005). "Gaussian cramer-rao bound for direction estimation of noncircular signal in unknown noise field." *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 53, No. 12, PP. 541-552.

11 - Stoica, P. and Nehoria, A. (1990). "Performance study of conditional and unconditional direction-of-arrival estimation." *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing,* Vol. 38, No. 10, PP. 1759-1783.

واژه هاي انگليسي به ترتيب استفاده در متن

1 - Direction of Arrival
2 - Cramer-Rao Band
3 - Unbiased
4 - Maximum Likelihood
5 - Side Lobes
6 - Uniform Linear Array