Industrial Management Journal

Print ISSN: 2008-5885
Online ISSN: 2423-5369

Determination of the optimal premium of non-life insurance via the Stochastic Dynamic Programming method

Maryam Rostamian*

*Corresponding Author, Ph.D. Candidate, Department of Industrial Management, Faculty of Economics, Management and Administrative Affairs, University of Semnan, Semnan, Iran. E-mail: maryamrostamian@semnan.ac.ir

Gholamhossien Golarzi

Assistant Prof, Department of Business Management, Faculty of Economics, Management and Administrative Affairs, University of Semnan, Semnan, Iran. E-mail: g_golarzi@semnan.ac.ir

Asma Hamzeh

Assistant Prof, Department Research of Property Insurance, Insurance Institute, Tehran. Iran. E-mail: hamzeh@irc.ac.ir

Nasrin Hozarmoghadam

Assistant Prof., Department Research of Personal Insurance, Insurance Institute, Tehran. Iran. E-mail: hozarmoghadam@irc.ac.ir

Abstract

Objective: One of the most important issues facing insurance companies is the determination of fair premium. The purpose of this study is to design a mathematical model for calculating the optimal insurance premium by maximizing the total expected discounted utility of the capital, considering the demand and competition of the non-life insurance market.

Methods: In the first stage, the capital equation of the insurance company is defined which is derived from the sum of insurance income and investment income. Insurance income is measured via the difference between insurance premiums and related expenses over the year as a function of stochastic demand. Next, the Stochastic demand function is defined based on the number of insurance policies in the past year, the average premium of the market, company premium which is the control function and a linear stochastic disturbance or variables which are related to the demand function. Since the average premium of the market and disruptive are Stochastic, demand is Stochastic. Consequently, the optimal premium is calculated using the Stochastic Dynamic Programming, discrete-time framework via maximizing the total expected discounted utility of the capital.

Results: The numerical results show that the optimal premium is directly related to the average market premium, previous year's demand, break-even premium and the expected expectation of stochastic disturbance. It was also shown that the expected sign of stochastic disturbance determines the optimal premium strategies.

Conclusion: From the findings of this study, it can be concluded that insurance companies should determine the optimal non-life insurance premium in a competitive environment via using the expected value sign of stochastic disturbance, which is determined based on the demand function. The results showed that the expected value sign of positive stochastic disturbance indicates a decreasing demand and the insurance company should change the strategy of determining the optimal premium in order to expand demand.

Keywords: Stochastic disturbance, Demand function, Average premium of the market.

Citation: Rostamian, Maryam; Golarzi, Gholamhossien; Hamzeh, Asma & Hozarmoghadam, Nasrin (2020). Determination of the optimal premium of non-life insurance via the Stochastic Dynamic Programming method. *Industrial Management Journal*, 12(4), 655-671. (*in Persian*)

Industrial Management Journal, 2020, Vol. 12, No.4, pp. 655-671
DOI: 10.22059/IMJ.2021.314448.1007802
Received: January 25, 2021; Acceped: March 13, 2021
Article Type: Research-based
© Faculty of Management, University of Tehran

مدیریت صنعتی

شاپا چاپی: ۲۰۰۸-۵۸۸۵
شاپا الکترونیکی: ۲۴۲۳-۵۳۶۹

تعیین حق بیمه بهینه غیرعمر با استفاده از روش برنامه‌ریزی پویای تصادفی

مریم رستمیان*

* نویسنده مسئول، دانشجوی دکتری، گروه مدیریت صنعتی، دانشکده اقتصاد، مدیریت و علوم اداری، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران. رایانامه: maryamrostamian@semnan.ac.ir

غلامحسین گل ارضی

استادیار، گروه مدیریت بازرگانی، دانشکده اقتصاد، مدیریت و علوم اداری، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران. رایانامه: g_golarzi@semnan.ac.ir

اسماء حمزه

استادیار، گروه پژوهشی بیمه‌های اموال و مسئولیت، پژوهشکده بیمه، تهران، ایران. رایانامه: hamzeh@irc.ac.ir

نسرین حضارمقدم

استادیار، گروه پژوهشی بیمه‌های اشخاص، پژوهشکده بیمه، تهران، ایران. رایانامه: hozarmoghadam@irc.ac.ir

چکیده

هدف: یکی از مهم‌ترین مسائلی که شرکت‌های بیمه با آن مواجه هستند تعیین حق بیمه منصفانه است. هدف این پژوهش طراحی مدل ریاضی محاسبه حق‌بیمه بهینه با بیشینه‌سازی مقدار مورد انتظار مطلوبیت کل تنزیل شده سرمایه، لحاظ کردن تقاضا و رقابت بازار بیمه غیر-عمر است.

روش: در ابتدا معادله سرمایه شرکت بیمه که حاصل جمع درآمد بیمه‌گری و درآمد سرمایه‌گذاری است، تعریف می‌شود. درآمد بیمه‌گری در هر سال از تفاوت میان حق بیمه و هزینه‌های بیمه‌گری در تابع تقاضای تصادفی محاسبه می‌گردد. در مرحله بعد، تابع تقاضای تصادفی بر اساس تعداد بیمه نامه‌های صادره سال گذشته، متوسط حق بیمه بازار، حق بیمه شرکت به‌عنوان متغیر کنترل و نیز اختلال تصادفی خطی یا متغیرهای تصادفی مرتبط با تابع تقاضا تعریف شده است. از آن‌جا که مقادیر متوسط حق بیمه بازار و اختلال تصادفی هستند، تقاضا تصادفی در نظر گرفته می‌شود. در نهایت، حق بیمه بهینه با استفاده از برنامه‌ریزی پویای تصادفی در قالب زمان گسسته با بیشینه‌سازی مقدار مورد انتظار مطلوبیت کل تنزیل شده سرمایه محاسبه می‌گردد.

یافته‌ها: نتایج عددی به‌دست آمده حاکی از آن است که حق بیمه بهینه با متوسط حق بیمه بازار، تقاضای سال قبل و حق بیمه سر به سر ارتباط مستقیم و با امید مورد انتظار اختلال تصادفی رابطه معکوس دارد. همچنین نشان داده شد که علامت امید مورد انتظار اختلال تصادفی تعیین کننده استراتژی حق بیمه بهینه است.

نتیجه‌گیری: از یافته‌های این پژوهش می‌توان نتیجه گرفت که شرکت‌های بیمه می‌بایست با استفاده از علامت مقدار مورد انتظار اختلال تصادفی که بر مبنای تابع تقاضا تعیین می‌شود، به تعیین حق بیمه بهینه غیرعمر در فضای رقابتی بپردازند. نتایج نشان داد که علامت مقدار مورد انتظار اختلال تصادفی مثبت، نشان‌دهنده تقاضای کاهشی است و شرکت بیمه می‌بایست به تغییر استراتژی تعیین حق بیمه بهینه به منظور گسترش تقاضا بپردازد.

کلیدواژه‌ها: اختلال تصادفی، تابع تقاضا ، متوسط حق بیمه بازار

استناد: رستمیان، مریم؛ گل ارضی، غلامحسین؛ حمزه، اسماء و حضارمقدم ، نسرین (۱۳۹۹). تعیین حق بیمه بهینه غیرعمر با استفاده از روش برنامه‌ریزی پویای تصادفی. *مدیریت صنعتی*، ۱۲(۴)، ۶۵۵- ۶۷۱.

مدیریت صنعتی، ۱۳۹۹، دوره ۱۲، شماره ۴، صص. ۶۵۵ – ۶۷۱
DOI: 10.22059/IMJ.2021.314448.1007802
دریافت: ۱۳۹۹/۰۹/۰۸، پذیرش: ۱۳۹۹/۱۲/۲۴
نوع مقاله: علمی پژوهشی
© دانشکده مدیریت دانشگاه تهران

مقدمه

یکی از معیارهایی که در جهت رتبه‌بندی شرکت‌های بیمه مورد استفاده قرار می‌گیرد حق بیمه شرکت‌ها است، حق بیمه معیار بهتری در مقایسه با مطالبات و هزینه‌هاست زیرا حق بیمه‌ها کاملا مشخص ولی مطالبات و هزینه‌ها همیشه در دسترس عموم نیستند (اپرجیس و پوفیناس[۱]، ۲۰۲۰). قیمت‌گذاری محصولات بیمه‌ای یا به اصطلاح تعیین حق بیمه یکی از مهم‌ترین مسائلی است که شرکت‌های بیمه با آن مواجه‌اند (پاینده نجف آبادی، ۱۳۹۸).

یکی از اصول مهم در دانش محاسبات فنی بیمه، اصل برابری[۲] است که مبنای فعالیت شرکت‌های بیمه و محاسبات مربوط به حق بیمه خصوصا در رشته‌های اموال و حوادث می‌باشد. شرکت‌های بیمه باید در محاسبه مقدار حق بیمه دو مورد را در نظر بگیرند. از یک سو بیمه‌گر باید حق بیمه‌ای را تعیین نماید که نه تنها خسارت‌های مورد انتظار و هزینه‌های بیمه‌گری و احتمال حوادث فاجعه آمیز و غیره را تحت پوشش قرار دهد، بلکه سود مورد نظر شرکت بیمه را نیز فراهم کند. از سوی دیگر، در بازار رقابتی بیمه، اگر بیمه‌گر حق بیمه‌ای را تعیین نماید که از حق بیمه منصفانه به‌طور معناداری بیشتر باشد، مشتریان خود را از دست خواهد داد (پازوکی، شیرکوند، مهدوی کلیشمی، ۱۳۹۸). ورنر و مادلین[۳](۲۰۱۶) این اصل را به شکل برابری ارزش انتظاری مجموع خسارت‌های احتمالی با مجموع حق بیمه‌های جمع شده عنوان می‌کنند و برای محاسبه حق بیمه خالص از فراوانی خسارت و شدت خسارت استفاده می‌کنند، سپس با افزودن هزینه سربار، حق بیمه کل را محاسبه می‌نمایند. نرخ‌های بالاتر، منجر به افزایش سود حاصل از فروش یک بیمه‌نامه می‌گردند، در عین حال افزایش نرخ منجر به کاهش تعداد مشتریان و بنابراین کاهش تعداد بیمه‌نامه‌های صادره خواهد شد. بنابراین برای تعیین نرخ‌های بهینه ارائه مدلی که تغییرات تقاضا را با توجه به تغییرات قیمت در نظر بگیرد، مورد نیاز است (منطقی پور، ۱۳۹۶). مطلوبیت هر شرکت بیمه با بیشینه‌سازی سرمایه و کمینه‌سازی ذخایر فنی میسر می‌گردد، نرخ بهینه معمولا نرخی است که منجر به بیشینه‌سازی سرمایه یا کمینه‌سازی ذخایر فنی شود (پانتلوس و پاسالیدو[۴]،۲۰۱۳،۲۰۱۶).

در اصل برابری تقاضا در بازار رقابتی بیمه در نظر گرفته نمی‌شود و حق بیمه براساس داده‌های گذشته شامل فراوانی و شدت خسارت بیمه نامه‌ها تعیین می‌شود. با توجه به نقش تقاضا برای بیمه در بازار به عنوان یک متغیر مؤثر در تعیین حق بیمه در بازار رقابتی و عدم توجه به اصل برابری به این متغیر، لزوم ارائه مدلی که این متغیر را در فرآیند محاسبه حق بیمه مورد توجه قرار دهد، وجود دارد. بنابراین هدف این پژوهش طراحی مدل ریاضی محاسبه حق‌بیمه بهینه با بیشینه‌سازی مقدار مورد انتظار مطلوبیت کل تنزیل شده سرمایه، لحاظ کردن تقاضا و رقابت بازار بیمه غیرعمر است. از آن‌جا که تقاضا تصادفی است و تابع هدف برنامه‌ریزی پویای تصادفی براساس مفهوم مقدار مورد انتظار مطلوبیت متغیر تصادفی است، در این پژوهش از روش برنامه‌ریزی پویای تصادفی استفاده می‌شود. برنامه‌ریزی تصادفی با حالاتی سروکار دارد که برخی یا تمام پارامترهای یک مسئله با متغیرهای تصادفی مشخص شوند. این حالات دربرگیرنده مسائل

---

[1] Apergies, & Poufinas

[2] Werner, & Modlin

[3] Principle of Equivalence

[4] Pantelous, & Passalidou

واقعی است، زیرا در مسائل واقعی تعیین دقیق پارامترها مشکل است. ایده کلی در مدل‌های برنامه‌ریزی تصادفی، تبدیل ماهیت احتمالی مسئله به مسئله معادل بدون احتمال است (فلاح‌لاجیمی، جعفرنژاد، مهرگان، الفت، ۱۳۹۴). بر این اساس، در این تحقیق به سؤال زیر پاسخ داده خواهد شد:

۱. چگونه می‌توان استراتژی حق بیمه بهینه را با توجه به تقاضا و رقابت در بازار تعیین کرد؟

در این مقاله ابتدا پیشینه‌های نظری و تجربی پژوهش ارائه شده است. سپس در قالب روش‌شناسی پژوهش فرآیند سرمایه شرکت بیمه براساس زنجیره مارکوف تعریف، عوامل موثر بر تابع تقاضا مشخص، مدل‌سازی مساله به منظور تعیین حق بیمه بهینه و داده‌های استفاده شده توضیح داده می‌شود. در یافته‌های پژوهش، نتایج به‌کارگیری مدل معرفی شده در این پژوهش ارائه شده و در نهایت بحث و نتیجه‌گیری آمده است.

پیشینه پژوهش

تیلور[1] (۱۹۸۶) اولین فردی بود که رابطه بین رفتار بازار و تعیین حق بیمه را با استفاده از بیشینه‌سازی ثروت بیمه‌گر در یک افق زمانی متناهی بررسی نمود. فرض وی این بود که محصولات بیمه‌ای دارای کشش مثبت قیمتی تابع تقاضا هستند و نیز تابع تقاضا در طی زمان ایستا و نسبتی از تقاضای سال قبل است. ساختار مدل تیلور بر مبنای یک مدل تقاضای گسسته بوده که درآن قیمت متوسط بازار به‌طور کامل ارزیابی شده است. تیلور در این مقاله با استفاده از نرخ‌گذاری مناسب به افزایش سهم سود سهامداران پرداخت.

امس و هابرمن[2] (۲۰۰۵) حق بیمه را با نظریه کنترل بهینه و بیشینه‌سازی سرمایه نهایی شرکت بیمه تحت قانون تقاضا محاسبه و عنوان کردند که اگر شرکت بیمه حق بیمه کمتری مطالبه کند سود کمتری عایدش خواهد شد و اگر حق بیمه بالایی مطالبه کند با کاهش تقاضا مواجه می‌شود. مدل پیوسته آن‌ها تعمیم مدل گسسته تیلور (۱۹۸۶) بود. یک حالت ساده را این گونه عنوان کردند که بیمه‌گذار حق بیمه فعلی را بپردازد و این در واقعیت برای شرکت بیمه بهینه نیست. سپس مدل را اصلاح و نرخ حق بیمه تعلق گرفته را معرفی کردند که نشان‌دهنده نرخ حق بیمه تجمعی دریافت شده از مشتریان موجود و جدید است. بیمه‌گذاران مجبور هستند که حق بیمه را در ابتدای قرارداد بپردازند و این نرخ را در طول مدت بیمه‌نامه بپردازند. سپس برای دو تابع تقاضا با انتخاب پارامتر مشخص این استراتژی را خوش تعریف و هموار نشان دادند. آن‌ها نشان دادند که این استراتژی‌ها برای تابع تقاضای خطی حق بیمه بهینه پویا تولید می‌کند اگر متوسط حق بیمه بازار دارای توزیع لاگ نرمال باشد.

امس، هابرمن و ساوولی[3] (۲۰۰۷) متوسط حق بیمه بازار را به صورت فرآیند براونی هندسی و متوسط حق بیمه بازار آینده را نیز دارای توزیع لاگ نرمال و مثبت در نظر گرفتند. آن‌ها فرآیند تقاضا و بیشینه‌سازی عبارت تابع مطلوبیت را

---

[1]. Taylor

[2]. Savoulli

[3]. Emss, & Haberman

تشکیل دادند. تابع تقاضا هم به دو صورت تابع تقاضای نمایی و تابع تقاضای با کشش ثابت تعریف شد. در نهایت دو استراتژی حق بیمه تعریف کردند، که در یکی از آن‌ها حق بیمه ضریبی ثابت از متوسط حق بیمه بوده و در دیگری حق بیمه تابعی از حق بیمه سر به سر[1] به‌علاوه اختلاف متوسط حق بیمه و حق بیمه سر به سر در یک پارامتر است و بهینه‌سازی را براساس این پارامتر انجام می‌دهند.

امس (۲۰۰۸) دو شکل استراتژی تصادفی را توصیف می‌کند: عدم‌اطمینان متوسط حق‌بیمه آینده بازار و عدم‌اطمینان در سطح حق‌بیمه نسبی. حق‌بیمه بهینه با استفاده از برنامه‌ریزی پویا تعیین و با برنامه‌ریزی قطعی مقایسه می‌شود. هدف مدل آن‌ها یافتن استراتژی حق‌بیمه بهینه نسبی با بیشینه سازی سرمایه نهایی مورد انتظار بود. نتایج آن‌ها نشان داد اگر متوسط حق بیمه بازار یک پارامتر تصادفی باشد مساله بهینه‌سازی به مجموعه‌ای از معادلات مشخصه تهی کاهش می‌یابد که با نمودار فازی تفسیر می‌شوند و در حالتی که واحد در معرض خطر تصادفی است ، یک استراتژی بهینه می‌تواند ماکزیمم‌کردن سرمایه نهایی مورد انتظار با تابع مطلوبیت نمایی باشد.

امس (۲۰۱۱) به قیمت‌گذاری بیمه در یک بازار رقابتی و واکنشی پرداخت. امس در مقاله خود مدلی کنترلی ارائه داده است که در آن واکنش بازار به استراتژی قیمت‌گذاری بیمه بررسی شده است. در این مدل خسارت با استفاده از یک توزیع لاگ نرمال تعیین شده و نرخ اندازه خسارت نامیده می‌شود. حق بیمه متوسط بازار از طریق نرخ‌گذاری و حق بیمه متوسط جاری تعیین می‌گردد. در این مقاله سرمایه شرکت بیمه با درنظر گرفتن محدودیت‌های موجود بیشینه شده است.

مائو ، کارسون ، استازسوکی و ون[2] (۲۰۱۳) به معرفی یک مدل قیمت‌گذاری پرداخت که در آن قیمت بیمه، سود سهامداران و خسارت واقع شده، به شکل یک فرآیند تصادفی[3] به هم وابسته هستند. آن‌ها تأثیر تابع تقاضا را بر حق بیمه به‌گونه‌ای که سرمایه نهایی شرکت بیمه بیشینه شود، بررسی کردند. با استفاده از معادله هامیلتون-ژاکوبی-بلمن[4] به صورت

$$J\left(\left(t_0, Xt_0 = x, \bar{P}_0=\bar{P}_0{}^0, (\pi, p)\right)\right) = E\left(U(X(T))\right) \qquad \text{رابطه ۱)}$$

که در آن X فرآیند ثروت، π میزان تخصیص سرمایه به دارایی ریسک‌دار و $\overline{\mathrm{P}}$ متوسط حق بیمه بازار، U تابع مطلوبیت و T افق زمانی است، حق بیمه بهینه و پرتفوی سرمایه بهینه را محاسبه کردند. نتایج نشان داد که مقدار تقاضا برای قراردادهای بیمه‌ای به تخصیص بهینه دارایی‌های ریسک‌پذیر در پرتفوی یک شرکت بیمه وابسته است و همچنین میانگین و نوسان قیمت بیمه بر استراتژی سرمایه‌گذاری علاوه بر خود میانگین و نوسان سرمایه تأثیرگذار است.

مائو، کارسون، استازسوکی (۲۰۱۷) نقش بیمه اتکایی را در ریسک تعهدات، ریسک قیمت‌گذاری و ریسک سرمایه گذاری بررسی و از یک مدل بهینه‌سازی پویای تصادفی برای قیمت‌گذاری بیمه در بازار رقابتی با فرآیند ریسک انتشار پرشی استفاده کردند. مدل آن‌ها مطلوبیت مورد انتظار سرمایه بیمه‌گر را با ادغام اثر متقابل فرآیند تصادفی سیر تکاملی

---

[1]. Break-even Premium

[2]. Stochastic Process

[3]. Mao, Carson, Ostaszewski, & Wen

[4]. Hamilton-Jacobi-Bellman

قیمت بیمه، بیمه اتکایی استراتژی سرمایه‌گذاری و اثر سرمایه‌گذاری ممکن بین مسئولیت‌های بیمه و ریسک سرمایه گذاری بیشینه می‌کند. در نهایت مسئله بهینه‌سازی را با معادله هامیلتون-ژاکوبی- بلمن حل کردند.

پیشینه تجربی

پانتلوس و پاسالیدو (۲۰۱۳) تابع تقاضا تصادفی در قالب زمان گسسته که در حقیقت گسترش ایده‌های تیلور (۱۹۸۶و۱۹۸۷) بود تشکیل دادند. علاوه بر این با استفاده از تابع تنزیل خطی برای فرآیند سرمایه شرکت همانند پژوهش امز (۲۰۰۷) ، فرمولی تحلیلی درون‌زا[1] برای استراتژی بهینه شرکت ارائه نمودند. در حقیقت آن‌ها مسأله بیشینه‌سازی فرآیند سرمایه شرکت با روش برنامه‌ریزی پویای تصادفی ارائه دادند. تابع تقاضای استفاده شده آن‌ها در پژوهش به علت وجود عامل تصادفی متوسط حق بیمه بازار و عامل متغیرهای تصادفی مرتبط با تابع تقاضا، تصادفی فرض شد. آن‌ها دو استراتژی مختلف برای متوسط حق بیمه بازار ارائه دادند که یکی تعیین متوسط حق بیمه بازار با استفاده از حضور تمام رقبای بازار و دیگری با حضور پنج شرکت که بیشترین حجم فعالیت را در بازار دارا بودند. در نهایت با تعیین نرخ‌های حق بیمه سر به سر مختلف، مقادیر حق بیمه بهینه محاسبه گردید.

پانتلوس و پاسالیدو (۲۰۱۵) تابع تقاضای تصادفی جامعی ارائه دادند که متغیر اعتبار شرکت به تابع تقاضای مقاله قبلی آن‌ها اضافه گردید. تابع تقاضای جدید تابعی از نسبت متوسط حق بیمه بازار شرکت، تقاضای سال گذشته، اعتبار شرکت و خطای تصادفی است. سپس دو پارامتر کشش در این مطالعه معرفی شد که α کشش تقاضای بازار و حق بیمه بهینه، β کشش تقاضای بازار نسبت به پارامتر اعتبار شرکت را اندازه می‌گرفت. برای برآورد متوسط حق بیمه بازار بیمه از فرآیند نقطه‌ای[2] استفاده نموده و در نهایت با استفاده از اطلاعات بیمه بدنه اتومبیل یونان، حق بیمه بهینه برای هر دو حالت مثبت یا منفی بودن اثر اعتبار[3] شرکت با مقادیر مختلف کشش محاسبه گردید. نتایج آن‌ها نشان داد زمانی‌که شرکت دارای اعتبار بسیار خوبی است و $0<\alpha \leq 1$ یا $\alpha>1$، شرکت مختار است هر حق بیمه‌ای را انتخاب کند به‌علت اینکه اعتبار خوب سود شرکت را تضمین نموده و شرکت می‌تواند سیاست تعیین حق بیمه را در سال آینده تغییر ندهد.

پانتلوس و پاسالیدو (۲۰۱۶) مدل غیرخطی حق‌بیمه- ذخیره[4] را با استفاده از اطلاعات بیمه بدنه اتومبیل و با کمینه سازی تابع غیرخطی ذخیره طراحی نمودند. در حقیقت آن‌ها اولین کسانی بودند که حق‌بیمه بهینه را براساس ذخیره حق‌بیمه محاسبه نمودند. ذخیره حق بیمه معادله تصادفی است که براساس اختلال تصادفی تعریف شده است. میانگین این اختلال تصادفی صفر است و کوواریانس آن تابع درجه دوم از پارامترهای مثل کشش درآمدی تقاضا، تعداد بیمه‌شدگان، تورم و اعتبار شرکت در نظر گرفته شده است. نتایج آن‌ها نشان داد که هر چه ذخایر بیشتر شود مقدار حق بیمه بهینه نیز بزرگتر می‌شود و شرکت‌های بیمه با ذخایر کمتر می‌بایست حق بیمه کمتری را برای جذب مشتریان جدید مطالبه کنند.

---

[1]. Endogenous

[2]. Reputation

[3]. Mourdoukoutas, Boonen, & Koo

[4]. Nash Equilibrium

موردوکوتاس، بونن، کو[۱] و پانتلوس (۲۰۲۱) به مطالعه بازی[۲] تصادفی یک دوره‌ای برای تعیین استراتژی حق بیمه بهینه غیرعمر در بازار بیمه رقابتی پرداختند. به‌طور خاص این استراتژی حق بیمه بهینه را توسط تعادل نش[۳] یک بازی با یک بازیکن[۴] تعیین کردند. آن‌ها فرض کردند هر بازیکن مطلوبیت مورد انتظار سرمایه نهایی را بیشینه می‌کند و سرمایه نهایی تصادفی است زیرا تعداد بیمه نامه‌ها و اندازه خسارت‌ها را نیز تصادفی فرض کردند و کل زیان هر بیمه‌گر را توسط مدل ریسک جمعی[۵] توصیف نمودند. تعداد مورد انتظار بیمه‌نامه را تحت‌تأثیر همه حق بیمه‌ها با دو تابع تقاضای مشخص به شکل نمایی با مشخصه‌های حساسیت به قیمت و بازار در نظر گرفتند. تقاضا در مدل اول بالای یک حد مفروض و تقاضای دوم را بدون این محدودیت گرفتند. استراتژی خالص حق بیمه تعادل نش با حل مسائل بهینه‌سازی مقید حل شد. برای اولین مدل آن‌ها وجود و یکتایی استراتژی خالص تعادل نش را ارائه دادند، در حالی‌که برای مدل دوم فرمولی برای زمانی‌که وجود دارد مشخص کردند. در نهایت دو مثال عددی برای نمایش یافته‌های مطالعه ارائه کردند.

منطقی پور (۱۳۹۶) در رساله‌اش با استفاده از اعداد فازی و الگوریتم k میانگین به تعیین نرخ‌های بهینه بیمه‌نامه های غیر عمر (بیمه باربری) پرداخت. وی برای دستیابی به این هدف الگوریتمی برای ساختن گروه‌های همگن مخاطره با قابلیت بیمه‌پذیری معرفی کرد، سپس با مطالعه رفتار گروه‌ها و برآورد تابع تقاضا در گروه همگن، نرخ‌ها را به گونه‌ای تعیین کرد که بیشترین سود ممکن حاصل شود. برای برآورد پارامترهای تابع تقاضا از تکنیک رگرسیون غیرخطی استفاده نموده و مدل بهینه‌سازی نرخ وی مدلی غیرخطی با قیدی غیرخطی می‌باشد. نتایج حل مدل با استفاده از بسته بهینه سازی نرم‌افزار متلب، نشان داد افزایش نرخ خسارت‌ها تا سطحی معین، می‌تواند بیشینه درآمد شرکت را افزایش دهد. همچنین بررسی توابع کشش قیمتی بر پایگاه داده‌های این پژوهش، نشان داد مخاطره‌های خوب، کشش قیمتی کمتری دارند. این نتیجه به این معنی است که کاهش یکسان نرخ حق‌بیمه‌ها، مخاطره‌های بد را بیش از مخاطره‌های خوب جذب می‌کند.

پازوکی، شیرکوند و مهدوی(۱۳۹۸) به قیمت‌گذاری محصولات بیمه‌ای با استفاده از روش نسبت انحراف بالقوه از میانگین[۶] در بیمه درمان تکمیلی پرداختند. در این روش ضمن محاسبه حق بیمه منصفانه[۷] و حق بیمه کل، به‌طور همزمان امکان محاسبه میزان توانگری[۸] شرکت بیمه که همان سطح اطمینان شرکت بیمه در پوشش خسارات یا تعهدات آتی می‌باشد، وجود دارد. وجه تمایز روش ارائه شده در این مقاله برای محاسبه حاشیه توانگری مالی شرکت‌های بیمه در مقایسه با روش‌های متداول این است که در این مقاله مفهوم عینی توانگری مالی به معنی احتمال پاسخگویی به کل مطالبات مشتریان به عنوان شاخص توانگری مالی در نظر گرفته شده است. در این تعریف شاخص توانگری مالی یک احتمال است. این احتمال دقیقا برابر است با احتمال این‌که شرکت بیمه قادر است تعهداتی که قبول کرده را ایفا نماید.

---

[1] Point Process
[2] Premium-Reserve
[3] Game
[4] Player
[5] Collective
[6] Fair Premium
[7] Potential Deviation Ratio
[8] Solvency

براساس نتایج تحقیق مقدار حق بیمه خالص و کل و همچنین مقدار انحراف بالقوه از میانگین لازم جهت دستیابی شرکت به سطوح اطمینان بالاتر و یا به بیان دیگر، حاشیه توانگری بالاتر، با تخمین توزیع واقعی فراوانی و شدت مطالبات با زمانی که با فرض نرمال بودن داده‌ها این مقادیر محاسبه می‌گردند متفاوت می‌باشد. این تفاوت به‌ویژه در مقدار انحراف بالقوه از میانگین، جهت دستیابی به سطوح اطمینان بالاتر، بسیار حیاتی می‌باشد و در صورت نادیده گرفته شدن این موضوع، در واقع حاشیه توانگری واقعی با حاشیه توانگری ظاهری محاسبه شده متفاوت خواهد بود.

پاینده نجف‌آبادی، عطاطلب و رضازاده (۱۳۹۸) به محاسبه حق بیمه نسبی یک سیستم نرخ‌گذاری شده براساس مدل پواسون آماسیده در دو نقطه پرداختند. مسأله‌ای که در این مقاله مورد تحقیق قرار گرفت مدل‌سازی اشتیاق بیمه‌گذاران برای دریافت تخفیف بر مبنای عدم گزارش خسارت‌های کوچک است. با توجه به این‌که سابقه عدم خسارت منجر به تخفیف در حق بیمه می‌شود لذا فرض کرد بیمه‌گذاران نوعی رفتار خاص در دو نقطه i,j ارائه می‌کنند. به‌گونه‌ای که به صورت معنی‌داری فراوانی دو نقطه i,j در مشاهدات زیاد است. در این تحقیق برای مدل‌بندی اشتیاق برای پاداش از یک توزیع پواسون استفاده شده است روش مورد استفاده یک روش تقریبی مبتنی بر روش‌های بیزی برای برآوردگرهای باورمندی تحت دو تابع زیان مربع خطا و لاینکس است. نتایج عددی نشان داد که اگر از مدل‌های پواسون آماسیده در دو نقطه استفاده شود، حق بیمه نسبی به‌طور معنی‌داری کاهش می‌یابد، که این امر در جذب مشتریان بیشتر تأثیر به –سزایی دارد. همچنین نشان داده شد که استفاده از تابع زیان لاینکس ایده مناسبی برای کاهش حق بیمه نسبی مشتریان است. در نهایت نتیجه گرفتند که اگر پدیده تمایل به پاداش مشتریان با استفاده از مدل‌های پواسون آماسیده مدل‌بندی شود، نرخ حق بیمه نسبی کاهش چشم‌گیری پیدا می‌کند و برآوردگر حق بیمه نسبی تحت تابع زیان لاینکس کمتر از حق بیمه نسبی تحت تابع زیان مربع خطاست و در نهایت توصیه کردند با توجه به این‌که سیستم پاداش–جریمه[1] مبتنی بر تعداد خسارت‌ها نمی‌تواند یک سیستم عادلانه باشد، از سیستمی استفاده شود که هر دو عامل تعداد و شدت خسارت‌ها را در محاسبات دخیل کند.

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، در این مطالعات، تنها پژوهشی با این مشخصات که تابع تقاضا را بر حسب متوسط حق بیمه بازار، حق بیمه سر به سر و اختلال تصادفی در نظر بگیرد، پژوهش پانتلوس و پاسالیدو (۲۰۱۳) است که در آن به محاسبه حق بیمه سر به سر اشاره نشده است و آن را به‌صورت فرضی در نظر گرفته است ولی در پژوهش حاضر حق بیمه سر به سر براساس فراوانی و شدت خسارت محاسبه گردیده است. در زمینه محاسبه حق بیمه بهینه نیز به رساله منطقی پور(۱۳۹۶) می‌توان اشاره کرد که هدف پژوهش وی بیشینه‌سازی سود است و برای حل مسأله غیرخطی پژوهش از روش نقطه درونی استفاده کرده است، حال‌آن که هدف در پژوهش حاضر بیشینه‌سازی سرمایه است و از معادله بلمن برای حل مسأله استفاده می‌کند و نیز تابع تقاضا پژوهش حاضر براساس متوسط حق بیمه بازار است که در مطالعه منطقی پور بیان نشده است. در سایر پژوهش‌های بررسی شده در پیشینه تجربی پژوهش، به تحقیق پازوکی و همکاران (۱۳۹۸) می‌توان اشاره کرد که براساس اصل برابری و نسبت انحراف بالقوه از میانگین حق بیمه منصفانه را محاسبه

---

[1]. Bonus –Malus System

کرده است. در تحقیق پاینده نجف‌آبادی و همکاران (۱۳۹۸) نیز حق بیمه نسبی براساس مدل پواسون آماسیده محاسبه گردیده است.

روش‌شناسی پژوهش

این پژوهش از نظر هدف از نوع تحقیقات کاربردی و توسعه‌ای است، زیرا به دنبال توسعه مدل‌های موجود در این حوزه است. پژوهش حاضر از نظر گردآوری داده‌ها توصیفی- پیمایشی است، زیرا به توصیف روابط بین متغیرها می‌پردازد. از آن‌جا که در این تحقیق برای مدل‌سازی ریاضی از برنامه‌ریزی پویای تصادفی استفاده می‌شود، در این قسمت به تشریح آن پرداخته می‌شود.

برخلاف مدل‌های سنتی که در آن داده‌های ورودی به مدل شامل ضرایب تابع هدف، ضرایب فنی و اعداد سمت راست قطعی‌اند، داده‌های ورودی به یک مدل تصادفی در زمان ایجاد مدل با اطمینان کامل شناخته شده نیستند. برنامه تصادفی یک مدل بهینه‌سازی ریاضی است که همه پارامترهای ورودی آن قطعی نیست و پارامترهای غیرقطعی با توزیع‌های احتمالی تعیین می‌شوند. مدل مورد استفاده در پژوهش مبتنی بر برنامه‌ریزی پویا به‌صورت زیر می‌باشد:

$$Max\ Z = [\int_{t_0}^{T} \mathrm{I(t,x,u)dt + F(x(T),T)}] \qquad \text{رابطه ۲)}$$

$$s.t. \qquad dx=f(t.x,u)dt+\sigma(t.x,u)dw$$

$$x(t_0)=x_0\,,\quad z(T,x(T))=F(x(T),T)$$

در این رابطه $x(t)$ متغیر وضعیت[1] ، $u(t)$ متغیر کنترل [2] و $w(t)$ حرکت براونی [3] هستند(برتسکاس، ۲۰۰۵: ۴۹).

بنابر نوع الگویی که قرار است مدل‌سازی شود، تابع هدف و متغیرها، متفاوت خواهند بود. برنامه‌ریزی پویای تصادفی با قطعی از این نظر متفاوت است که وضعیت در مرحله بعدی توسط وضعیت و اتخاذ یک رویه در مرحله جاری کاملا مشخص و معین نخواهد شد. آنچه که در این جا معلوم است تابع وضعیت‌های مرحله بعدی است. به این ترتیب بهینه‌سازی از هر مرحله به بعد براساس امید ریاضی تابع هدف صورت می‌گیرد (مومنی،۱۳۸۷). هاگن(۲۰۱۶) تابع انتقال وضعیت[4] را در برنامه‌ریزی پویای قطعی $x_{k-1}=t_k(x_k,d_k)$ و تصادفی $x_{k-1}=t_k(x_k,d_k,\xi_k)$ در نظر می‌گیرد و امید مورد انتظار تابع مطلوبیت را به‌شکل زیر بیان می‌کند:

$$E[U(\xi)]=\int u(\xi)f(\xi)d\xi \qquad \text{رابطه ۳)}$$

در این رابطه، ξ_k متغیر تصادفی ، $u(\xi)$ تابع مطلوبیت، $f(\xi)$ تابع چگالی، $E[U(\xi)]$ مقدار مورد انتظار مطلوبیت است.

در پژوهش حاضر، هدف بیشینه‌سازی مقدار مورد انتظار مطلوبیت کل تنزیل شده سرمایه شرکت بیمه در یک افق زمانی متناهی برای تعیین حق بیمه بهینه است. با توجه به این‌که تابع تقاضا از دو متغیر تصادفی متوسط حق بیمه بازار و اختلال تصادفی تشکیل شده است (هاگن،۲۰۱۶)، به همین علت از روش برنامه‌ریزی پویای تصادفی استفاده می‌شود و

---

[1] . Status Variable.
[2] . Brownie Motion
[3] . Markov Process
[4] . Control Variable

از آن‌جا که حق بیمه غیرعمر در بازه زمانی یک‌سال تعیین می‌شود از روش برنامه‌ریزی پویای تصادفی در حالت گسسته استفاده می‌گردد. در این مدل سرمایه شرکت بیمه متغیر وضعیت است و حق بیمه مطالبه شده از بیمه‌گذار متغیر کنترل می‌باشد. بنابراین معادله سرمایه شرکت بیمه در سال $[k,k+1)$ که از فرآیند مارکوف[1] پیروی می‌کند به صورت رابطه ۴ تعریف می‌شود.

رابطه ۴) $w_{k+1}=-a_k w_k+(p_k-\pi_k)V_k$

در این رابطه w_{k+1} سرمایه شرکت بیمه در سال $[k,k+1)$ ، V_k تقاضای بیمه (تعداد بیمه‌نامه صادره) در سال $[k,k+1)$ ، π_k حق بیمه سر به سر در سال $[k,k+1)$ ، p_k حق بیمه مطالبه شده از بیمه‌گذار در سال $[k,k+1)$ ، $-a_k w_k$ هزینه نگهداشت[2] سرمایه است.

حق بیمه سر به سر یا هزینه خسارت در رابطه ۴ مقدار حق بیمه‌ای است که تنها برای پوشش خسارات در نظر گرفته می‌شود و هزینه‌های بالاسری را شامل نمی‌شود. در این حالت، حق بیمه میانگین خسارتی است که در اثر به اشتراک گذاشتن ریسک بین تمامی اعضای گروه به هر بیمه‌گذار به ازای هر بیمه‌نامه اختصاص می‌یابد. حق بیمه سر به سر به صورت رابطه ۵ نوشته می‌شود.

رابطه ۵) $\pi = \frac{\bar{n}}{p} * \bar{x}$

در این رابطه ، $\bar{n}$ میانگین تعداد خسارات، $\bar{x}$ میانگین مقدار یا شدت خسارت و p تعداد بیمه‌نامه‌های صادره است.

در رابطه ۴، V_k متغیر تصادفی است به‌علت اینکه تابعی از دو متغیر θ_k و $\bar{p}_k$ تصادفی است که معادله آن به‌صورت زیر است:

رابطه ۶) $V_k= f_k(V_{k-1}, p_k, \bar{p}_k, \theta_k)$

در این رابطه، V_{k-1} تعداد بیمه‌نامه صادره در سال k-1 است، $\bar{p}_k$ متوسط حق بیمه مطالبه شده بازار بیمه از بیمه گذار در سال $[k,k+1)$ و θ_k متغیر اختلال تصادفی یا میزان تقاضای در سال $[k,k+1)$ است که شرکت بیمه از دست می‌دهد و یا به‌دست می‌آورد به علت متغیرهایی که مرتبط با تابع تقاضا هستند اما در مدل وارد نشده‌اند. براساس مدل تابع تقاضا پانتلس و پاسالیدو (۲۰۱۳)، در بازار رقابتی اگر متوسط حق بیمه بازار بدون تغییر باشد و حق بیمه مطالبه شده توسط یک شرکت زیاد باشد بدون تردید تقاضای آن شرکت بیمه کاهش می‌یابد و نیز اگر حق‌بیمه مطالبه شده توسط شرکت بیمه بدون تغییر باشد و متوسط حق‌بیمه بازار کاهش یابد تقاضای شرکت بیمه هم کاهش می‌یابد، بنابراین تقاضای بیمه به صورت نسبتی از متوسط حق بیمه بازار بیمه به حق بیمه مطالبه شده یک شرکت بیمه از بیمه‌گذار ضربدر تابع تقاضای سال قبل و یک اختلال تصادفی (θ_k) به صورت رابطه ۸ تعریف می‌گردد. در اینجا فرض می‌شود که تقاضا در سال k+1 نسبتی از تقاضای سال k است.

رابطه ۷) $V_k=V_{k-1}\frac{\bar{p}_k}{p_k}-\theta_k$

---

[1]. Stage Transformation Function

[2]. Cost of holding

با توجه به رابطه ۷، θ_k به‌صورت زیر در هر سال برآورد می‌گردد.

رابطه ۸) $\hat{\theta}_k = V_{k-1}\frac{\bar{p}_k}{p_k} - V_k$

در ادامه برای به‌دست آوردن مقدار مورد انتظار θ_k، مقدار θ_k را در هر سال برآورد کرده و به مجموع سال‌های تحت بررسی تقسیم می‌شود. در واقع $E(\theta_k)$ مقدار مورد انتظار بیمه‌نامه‌های صادره است که شرکت بیمه از دست می‌دهد و یا به‌دست می‌آورد به علت متغیرهایی که مرتبط با تابع تقاضا هستند اما در مدل وارد نشده‌اند، این مقدار مورد انتظار به‌صورت رابطه زیر است:

رابطه ۹) $E(\theta_k) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\hat{\theta}_i$

$E(\theta_k) > 0$ نشان‌دهنده تقاضای کاهشی است و اینکه شرکت در حال از دست دادن بازار است، در این حالت حق بیمه بهینه محاسبه می‌گردد. عدد صفر را می توان با μ جایگزین کرد، μ عدد تعیین شده توسط تیم مدیریتی شرکت بیمه است.

متوسط حق بیمه بازار در رابطه تابع تقاضا را نیز می‌توان به صورت زیر برآورد نمود:

رابطه ۱۰) $E(\bar{p}) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{K} b_{i,n}\, p_{i,n}$

در این رابطه m تعداد سال‌های مورد بررسی ، K تعداد رقبای بازار، $p_{i,n}$ حق بیمه شرکت i ام در سال n، $b_{i,n}$ تعداد بیمه نامه‌های صادره شرکت i ام در سال n تقسیم بر مجموع بیمه‌نامه‌های صادره بازار در سال n ام است. مقدار $b_{i,n}$ از رابطه ۱۱ به‌دست می‌آید:

رابطه ۱۱) $b_{i,n} = V_{i,n}\left(\sum_{i=1}^{m} V_{i,n}\right)^{-1}$

در این رابطه $V_{i,n}$ تعداد بیمه‌نامه‌های صادره شرکت i ام در سال n است.

با توجه به ساده‌سازی‌های انجام گرفته و استفاده از رابطه شماره ۶ به عنوان قید مسئله، معادله سرمایه در رابطه ۴ به‌صورت رابطه ۱۲ بازنویسی می‌شود:

رابطه ۱۲) $w_{k+1} = -a_k w_k + (p_k - \pi_k)\, f_k(V_{k-1}, p_k, \bar{p}_k, \theta_k)$

با جایگزین کردن مقدار V_k از رابطه ۷ در رابطه ۱۲ عبارت به شکل رابطه ۱۳ تعریف می‌گردد:

رابطه ۱۳) $w_{k+1} = -a_k w_k + (p_k - \pi_k)\left(V_{k-1}\frac{\bar{p}_k}{p_k} - \theta_k\right)$

از آن‌جا که مدل برنامه‌ریزی پویای تصادفی به دنبال بیشینه‌سازی مطلوبیت مورد انتظار ارزش فعلی رابطه ۳ نسبت به قید رابطه ۵ است بنابراین تابع هدف پژوهش به صورت رابطه ۱۴ تعریف می‌شود:

رابطه ۱۴) $J_k(w_k) = \text{Max}E\left[\sum_{k=0}^{T} U(w_k, k)\right] = \text{Max } E\left[\sum_{i=k}^{T-1} \nu^i w_i\right]$

در این رابطه $U(w_k, k)$ ارزش فعلی سرمایه w_k، T افق زمانی است که در اینجا محدود فرض می‌گردد، ν عامل تنزیل سرمایه شرکت بیمه است که از رابطه $\nu = \frac{1}{1+r}$ به‌دست می‌آید. در رابطه عامل تنزیل r نرخ بازده سهامداران است.

بیشترین مقدار رابطه ۱۴، $w_0 d_0 + e_0$ است و رابطه ۱۴ به ازای $k=T$، $J_T(w_T) = w_T d_T + e_T$ صفر می‌گردد. برای محاسبه حق بیمه بهینه مقادیر d_k و e_k به شکل زیر تعریف می‌شوند.

رابطه۱۵) $d_k = \nu^k - a_k d_{k+1} > 0 d_T = 0$

$$e_k = -d_{k+1}\left(\left(\frac{1}{E(\theta_k)}\pi_k V_{k-1}E(\bar{p}_k)\right)^{1/2} E(\theta_k) - V_{k-1}E(\bar{p}_k)\right) + d_{k+1}\pi_k\left(E(\theta_k) - V_{k-1}E(\bar{p}_k)\left(\frac{1}{E(\theta_k)}\pi_k V_{k-1}E(\bar{p}_k)\right)^{-1/2}\right) + e_{k+1}\quad, e_T=0$$
رابطه ۱۶)

زمانی‌که مسئله بهینه‌سازی دارای قید به‌صورت معادله دیفرانسیلی باشد و این معادله شامل فرایند تصادفی براونی باشد، دیگر نمی‌توان این‌گونه مسائل را با استفاده از روش حساب تغییرات و اصل ماکزیمم حل نمود و باید از روش برنامه ریزی پویا استفاده کرد. لذا در اینجا چون مسئله در رابطه ۴ دارای قید تصادفی V_kمی‌باشد، باید از روش برنامه‌ریزی پویا که استفاده از معادله بلمن می‌باشد، استفاده نمود. معادله بلمن به‌صورت زمان گسسته در رابطه ۱۷ مشخص شده است.

$$J_k(W_k) = \mathrm{Max}E\{\nu^k w_k + j_{k+1}(w_{k+1})\} = \mathrm{Max}\{\nu^k w_k + E\, j_{k+1}(w_{k+1})$$
رابطه ۱۷)

با توجه به معادله بلمن رابطه ۱۷، لازم است رابطه زیر با استقرا اثبات شود.

$$J_k(w_k) = w_k d_k + e_k$$
رابطه ۱۸)

برای اثبات رابطه ۱۸در رابطه ۱۷ مقدار عبارت$J_{k+1}(w_{k+1})$ را جایگزین نموده و رابطه ۱۹ به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$\begin{aligned}
J_k(W_k) &= \mathrm{Max}\{\nu^k w_k + E\, J_{k+1}(w_{k+1})\}\\
&= \mathrm{Max}\{\nu^k w_k + d_{k+1}E(w_{k+1}) + e_{k+1}\}\\
&= \mathrm{Max}\{\nu^k w_k + d_{k+1}E(-a_k w_k + (p_k - \pi_k)V_k) + e_{k+1}\}\\
&= \mathrm{Max}\{\nu^k w_k - a_k w_k d_{k+1} + d_{k+1}(p_k - \pi_k)(V_{k-1}\frac{E(\bar{P}_k)}{p_k} - \theta_k) + e_{k+1}\}
\end{aligned}$$
رابطه ۱۹)

قسمت آخر رابطه ۱۹ را برابر A فرض کرده، سپس نسبت به متغیر کنترل p_k مشتق گرفته مساوی صفر قرار می‌دهیم. با جایگزینی مقدار بهینه متغیرهای کنترل در معادله بلمن مسئله و حل این معادله مقدار نهایی و بهینه متغیر کنترل به صورت رابطه ۲۰ به‌دست می‌آید.

$$A = w_k(\nu^k - d_{k+1}a_k) + (V_{k-1}E(\bar{p}_k) - p_k E(\theta_k))d_{k+1} - d_{k+1}\pi_k(V_{k-1}\frac{E(\bar{P}_k)}{p_k} - E(\theta_k)) + e_{k+1}$$

شرط مرتبه اول بهینه‌سازی عبارت است از:

$$\frac{\partial A}{\partial p_k} = d_{k+1}\pi_k V_{k-1}\frac{E(\bar{P}_k)}{p^2{}_k} - d_{k+1}E(\theta_k) = d_{k+1}(\pi_k V_{k-1}\frac{E(\bar{P}_k)}{p^2{}_k} - E(\theta_k)) = 0$$

اگر $E(\theta_k)>0$ عبارت $\pi_k V_{k-1}\frac{E(\bar{P}_k)}{p^2{}_k} - E(\theta_k)=0$ نتیجه می‌شود، سپس حق بیمه بهینه عبارت است از:

$$p^*{}_k = \left(\frac{1}{E(\theta_k)}\pi_k v_{k-1}E(\bar{p}_k)\right)^{1/2} \qquad k \in ٠,1,2,\ldots,T-1$$
رابطه ۲۰)

ملاحظه می‌شود که حق بیمه بهینه رابطه مستقیم با حق بیمه سر به سر و متوسط حق بیمه بازار و رابطه معکوس با $E(\theta_k)$ دارد. با جایگذاری مقادیر بهینه متغیرهای کنترل در معادله A رابطه ۱۸ اثبات می‌گردد.

$$-w_k(a_k d_{k+1} - \nu^k) - d_{k+1}(p^*{}_k E(\theta_k) - V_{k-1}E(\bar{p}_k)) + d_{k+1}\pi_k(E(\theta_k) - V_{k-1}(p_k)^{-1}{}_k)) + e_{k+1}$$
رابطه ۲۱)

در ادامه مقدار مورد انتظار متغیر وضعیت یعنی w_k به‌شکل زیر برای $E(\theta_k)>\mu$ به‌دست می‌آید.

$$E(w^*{}_{k+1}) = V_{k-1}E(\bar{p}_k) + \pi_k E(\theta_k) - \{a_k w_k + 2(E(\theta_k)\pi_k V_{k-1}E(\bar{p}_k))^{1/2}\}$$
رابطه ۲۲)

داده‌های استفاده شده

در این پژوهش اطلاعات مربوط به بیمه‌نامه‌های بدنه اتومبیل همه شرکت‌های بیمه موجود در پایگاه داده بیمه مرکزی برای برآورد متوسط حق بیمه بازار بیمه در سال‌های ۱۳۹۸-۱۳۹۴ مورد استفاده قرار گرفت. فاکتورهای حق بیمه، ارزش اتومبیل، خسارت، سال ساخت اتومبیل از این پایگاه داده استخراج گردید. برای بررسی موردی شرکت‌های بیمه از پایگاه اطلاعات بیمه‌نامه‌های بدنه اتومبیل یکی از شرکت‌های بیمه و به منظور مقایسه نیز از اطلاعات تنها شرکت دولتی بیمه در بازار بیمه کشور که بیشترین پرتفوی را در بازار بیمه داراست استفاده گردید. برای رسیدن به مقدار بهینه حق بیمه از کدهای بهینه‌سازی نرم افزار پایتون استفاده شد.

یافته‌های پژوهش

در ابتدا با استفاده از اطلاعات بیمه‌نامه‌های همه شرکت‌های بیمه در بازار بیمه بدنه اتومبیل به ترتیب برای اتومبیل‌هایی با ارزش ۳۰۰ میلیون ریال، ۶۰۰ میلیون ریال و صفر کیلومتر، متوسط حق بیمه بازار در هر سال را به صورت رابطه ۹ و ۱۰ برآورد نموده که این محاسبات در جدول ۱ آمده است.

جدول ۱. محاسبه متوسط حق بیمه بازار در هر سال(ریال)

ارزش اتومبیل صفر کیلومتر	۱۳۹۴	۱۳۹۵	۱۳۹۶	۱۳۹۷	۱۳۹۸	$E(\bar{P})$
متوسط حق بیمه بازار	$\bar{p}_1$	$\bar{p}_2$	$\bar{p}_3$	$\bar{p}_4$	$\bar{p}_5$	
۳۰۰میلیون ریال	۳۶۸۵۳۸۰	۳۷۸۳۷۶۰	۳۵۳۳۰۴۷	۳۵۳۰۲۴۵	۳۶۵۷۱۶۷	۳۶۳۷۹۲۰
۶۰۰میلیون ریال	۶۹۴۳۸۰۲	۶۶۰۱۳۵۲	۵۷۶۸۹۰۰	۶۳۵۳۲۲۵	۵۸۵۶۰۰۹	۶۳۰۴۶۵۷

تعداد بیمه‌نامه‌ها و حق بیمه شرکت نمونه مورد نظر برای محاسبه حق بیمه بهینه و نیز سهم از بازار شرکت بیمه مفروض در جداول ۲ و ۳ مشخص گردیده است.

جدول ۲. تعداد بیمه‌نامه‌های شرکت بیمه مفروض و حق بیمه(ریال) در هر سال

ارزش اتومبیل	۱۳۹۴		۱۳۹۵		۱۳۹۶		۱۳۹۷		۱۳۹۸	
	تعداد بیمه نامه صادره	حق بیمه	تعداد بیمه نامه صادره	حق بیمه	تعداد بیمه نامه صادره	حق بیمه	تعداد بیمه نامه صادره	حق بیمه	تعداد بیمه نامه صادره	حق بیمه
۳۰۰ میلیون ریال	۱۰۸۱	۳۹۷۸۱۹۱	۶۶۴	۳۸۵۶۲۱۲	۸۴۰	۳۳۴۸۲۶۶	۳۰۱	۳۲۹۸۱۲۴	۱۵	۳۴۴۲۸۳۹
۶۰۰ میلیون ریال	۲۱۳	۷۲۰۵۲۷۴	۱۹۵	۶۸۰۸۶۷۳	۴۵۷	۵۴۷۹۴۷۰	۷۹۳	۶۳۰۱۱۴۳	۴۶۸	۶۳۵۲۰۳۴

جدول ۳. سهم از بازار شرکت بیمه مفروض در هر سال

سهم از بازار	۱۳۹۴	۱۳۹۵	۱۳۹۶	۱۳۹۷	۱۳۹۸
۳۰۰ میلیون ریال	۱۷ ٪	۱۲ ٪	۱۲ ٪	۵ ٪	۲۷ ٪
۶۰۰ میلیون ریال	۱۷ ٪	۱۸ ٪	۱۷ ٪	۱۰ ٪	۵۷ ٪

سپس با استفاده از اطلاعات بیمه‌نامه بدنه اتومبیل شرکت بیمه مورد نظر مندرج در جدول ۲ شامل تعداد بیمه‌نامه و حق بیمه، $\hat{\theta}$ هرسال را با توجه به رابطه ۷ برآورد نموده و در نهایت $E(\theta_k)$ که در بخش قبل معرفی گردید، به‌صورت رابطه ۸ محاسبه شده است. مقادیر $\hat{\theta}_k$ و $E(\theta_k)$ در جدول شماره ۴ درج گردیده است.

جدول ۴. محاسبه $E(\theta_k)$

ارزش اتومبیل	۱۳۹۴-۱۳۹۵	۱۳۹۵-۱۳۹۶	۱۳۹۶-۱۳۹۷	۱۳۹۷-۱۳۹۸	$E(\theta_k)$
	$\widehat{\theta_1}$	$\widehat{\theta_2}$	$\widehat{\theta_3}$	$\widehat{\theta_4}$	
۳۰۰ میلیون ریال	۳۵۵	-۱۱۹	۶۲۶	۳۳۳	۲۹۱
۶۰۰ میلیون ریال	-۹	-۲۷۶	-۷۹۳	-۴۶۸	-۳۸۷

با توجه به اینکه در جدول۴، برای اتومبیلی با ارزش ۳۰۰ میلیون ریال، $E(\theta_k)$ عدد مثبت ۲۹۱ به دست آمده است، می‌توان گفت که انتظار می‌رود در سال ۱۳۹۹ شرکت بیمه مفروض ۲۹۱ تعداد از بیمه نامه‌ها را از دست بدهد، در این حالت باید شرکت بیمه سیاست‌های خود را تغییر دهد و حق بیمه بهینه با استفاده از رابطه ۱۹ محاسبه گردد. زمانی‌که ارزش اتومبیل ۶۰۰ میلیون ریال است، انتظار می‌رود تقاضا در سال ۱۳۹۹ افزایشی باشد، بنابراین نیازی نیست شرکت بیمه سیاست‌های خود را تغییر دهد و هر تغییری در سیاست شرکت می‌تواند بر تقاضا تأثیر منفی بگذارد.

به منظور مقایسه $E(\theta_k)$ شرکت مفروض با شرکتی که بیشترین تعداد بیمه‌نامه‌ها را در هر سال دارد، برای شرکتی که بیشترین پرتفوی بازار بیمه را در اختیار دارد، $E(\theta_k)$ در دو حالت ارزش اتومبیل ۳۰۰ میلیون ریال و ۶۰۰ میلیون ریال محاسبه گردید که نتایج در جدول ۵ آمده است.

جدول ۵: محاسبه $E(\theta_k)$

ارزش اتومبیل	$E(\theta_k)$
۳۰۰ میلیون ریال	۱
۶۰۰ میلیون ریال	-۱

نتایج جدول ۵ نشان می‌دهد که شرکتی با بیشترین پورتفوی تقریبا دارای مقدار مورد انتظار θ_k صفر است و بنابراین نیازی به تعیین حق بیمه بهینه ندارد. سپس برای شرکت مفروض در پژوهش در سال‌های ۱۳۹۸-۱۳۹۴ حق بیمه سر به سر را طبق رابطه ۴ برآورد نموده و در جدول ۶ درج گردیده است.

جدول ۶: محاسبه حق‌بیمه سر به سر در هر سال

ارزش اتومبیل	۱۳۹۴	۱۳۹۵	۱۳۹۶	۱۳۹۷	۱۳۹۸
	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
۳۰۰ میلیون ریال	۱۹۶۴۵۷۹	۲۲۰۵۵۷۹	۲۴۳۵۱۲۲	۲۴۰۰۴۶۶	۳۵۵۸۱۷۰
۶۰۰ میلیون ریال	۳۸۹۴۵۰۳	۵۲۰۷۸۹۲	۳۶۶۸۳۰۳	۲۳۷۸۹۶۴	۴۱۷۸۴۳۰

در نهایت حق بیمه بهینه طبق رابطه ۱۹ برای اتومبیلی با ارزش ۳۰۰ میلیون ریال در سال ۱۳۹۹ که در آن $E(\theta_k)>0$ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$p^*_k=$ ۳۶۵۶۲۲۱

طبق رابطه ۱۹ حق بیمه بهینه رابطه مستقیم با حق بیمه سر به سر و متوسط حق بیمه بازار و رابطه معکوس با $E(\theta_k)$ دارد. حق بیمه بهینه شرکت بالاتر از متوسط حق بیمه بازار محاسبه شده در جدول شماره ۱ است، بنابراین شرکتی که تقاضای آن در حال کاهش است مجبور است حق بیمه بهینه خود را کمتر از حق بیمه بازار در سال بعد تعیین کند.

بحث و نتیجه‌گیری

هدف این پژوهش طراحی مدل ریاضی محاسبه حق‌بیمه بهینه با بیشینه‌سازی مقدار مورد انتظار مطلوبیت کل تنزیل شده سرمایه، لحاظ کردن تقاضا و رقابت بازار بیمه غیرعمر است. در ابتدا معادله سرمایه شرکت بیمه که حاصل جمع درآمد بیمه‌گری و درآمد سرمایه‌گذاری است، تعریف گردید. درآمد بیمه‌گری در هر سال به صورت تفاوت میان حق بیمه و هزینه‌های بیمه‌گری در تابع تقاضای تصادفی اندازه‌گیری شد. در مرحله بعد، تابع تقاضای تصادفی براساس تعداد بیمه نامه‌های صادره سال گذشته، متوسط حق بیمه بازار، حق بیمه شرکت به‌عنوان متغیر کنترل و نیز اختلال تصادفی خطی یا متغیرهای تصادفی مرتبط با تابع تقاضا معرفی گردید. در نهایت، حق بیمه بهینه با استفاده از برنامه‌ریزی پویای تصادفی در قالب زمان گسسته با بیشینه‌سازی مقدار مورد انتظار مطلوبیت تنزیل شده سرمایه در حالتی که تقاضا کاهشی است، محاسبه شد. نتایج عددی به‌دست آمده حاکی از آن است که حق بیمه بهینه با متوسط حق بیمه بازار، تقاضای سال قبل و حق بیمه سر به سر ارتباط مستقیم و با امید مورد انتظار اختلال تصادفی رابطه معکوس دارد. همچنین نشان داده شد که علامت امید مورد انتظار اختلال تصادفی تعیین کننده استراتژی حق بیمه بهینه است. از یافته‌های این پژوهش می‌توان نتیجه گرفت که شرکت‌های بیمه می‌بایست با استفاده از علامت امید مورد انتظار اختلال تصادفی که بر مبنای تابع تقاضا تعیین می‌شود، به تعیین حق بیمه بهینه غیرعمر در فضای رقابتی بپردازند. نتایج نشان داد که علامت امید مورد انتظار اختلال تصادفی مثبت، نشان‌دهنده تقاضای کاهشی است و شرکت بیمه می‌بایست به تغییر استراتژی تعیین حق بیمه بهینه به منظور گسترش تقاضا بپردازد.

در مطالعه پازوکی (۱۳۹۸) مدل تعیین حق بیمه براساس توانگری و اصل برابری ورنر و مادلین(۲۰۱۶) استفاده شده است که در این مدل از داده‌های ورودی فراوانی و شدت خسارت برای تعیین حق بیمه منصفانه استفاده می‌کند. بر اساس اصل برابری در هر رشته بیمه‌ای مجموع حق بیمه‌های جمع شده از کلیه بیمه‌گذاران تقریبا باید برابر با مجموع خسارت‌های مورد انتظار در یک دوره زمانی مشخص باشد. با استفاده از همین اصل، فرمول محاسبه حق بیمه خالص نرخ یا فراوانی خسارت ضربدر متوسط شدت خسارت است. ملاحظه می‌گردد که در این اصل، تقاضای بازار در نظر گرفته نمی‌شود و حق بیمه کل یا همان حق بیمه مطالبه شده از بیمه‌گذار با افزودن ضریب سربار ریسک محاسبه می‌شوند. در حالی‌که پژوهش حاضر با لحاظ کردن متغیر تقاضا در فضای رقابتی که در محاسبات شرکت‌های بیمه نادیده گرفته می‌شود حق بیمه بهینه را محاسبه می‌کند و این موضوع یکی از امتیازات این مدل شمرده می‌شود. از مطالعات داخلی که با لحاظ کردن تابع تقاضا نرخ‌های بهینه حق‌بیمه را مشخص می‌کند می‌توان تنها به پژوهش منطقی پور(۱۳۹۶) اشاره کرد. وی با مطالعه رفتار گروه‌های همگن ریسک تابع تقاضا را در هر گروه برآورد کرده و با درنظر گرفتن تابع تقاضا نرخ‌های بهینه را مشخص نمود و پارامترهای تابع تقاضا را در هر گروه با استفاده از رگرسیون محاسبه کرد. در حقیقت وی نرخ‌های ارائه‌شده توسط شرکت را در هرگروه همگن خوشه‌بندی کرد و تعداد بیمه‌نامه‌های هر خوشه را به‌عنوان تقاضا برای مرکز آن خوشه درنظر گرفت. در مطالعه وی هدف بیشینه‌سازی سود است و برای حل این مسأله غیرخطی از روش نقطه درونی استفاده کرده است، حال آن که در پژوهش حاضر هدف بیشینه‌سازی سرمایه است و از معادله بلمن برای حل مسأله استفاده می‌کند و نیز تابع تقاضا پژوهش حاضر براساس متوسط حق بیمه بازار است که در مطالعه منطقی پور بیان نشده است. در حقیقت وجه تمایز روش ارائه شده در این مقاله برای محاسبه حق بیمه شرکت های بیمه در مقایسه با روش‌های متداول این است که در این مقاله معادله تابع تقاضا بر حسب متغیرهای که در مدل وارد نشده‌اند و انتظار می‌رود بر تقاضای بیمه تاثیرگذار باشند تعریف شده است و با توجه به پویایی‌های مدل، حق‌بیمه بهینه براساس تابع تقاضای شرکت بیمه به‌دست آمده است لذا این حق بیمه با فرض ثابت بودن سایر شرایط محاسبه نگردیده است و این یکی از نقاط قوت روش برنامه‌ریزی پویای تصادفی است که موجب اطمینان بیشتر به حق بیمه محاسبه شده می‌گردد. در ادامه محدودیت‌های پژوهش، پیشنهادات کاربردی و پیشنهادات برای مطالعات آتی ارائه می‌شود.

به‌عنوان پیشنهاد کاربردی توصیه می‌شود، شرکت‌های بیمه براساس مدل این تحقیق و با در نظر گرفتن رقابت بازار و متوسط حق بیمه بازار، حق بیمه بهینه را تنظیم نموده و به جذب مشتریان در بازار بپردازند. در مطالعات آتی پیشنهاد می‌شود از متغیرهای کلان اقتصادی مانند نرخ تورم، کشش درآمدی تقاضا و اعتبار شرکت در برآورد تابع تقاضا استفاده شود، بیشینه‌سازی مقدار مورد انتظار مطلوبیت کل تنزیل شده درجه دوم سرمایه جایگزین تابع هدف خطی پژوهش حاضر شود و نیز از مدل ارائه شده در طیف وسیعی از انواع بیمه نامه‌های غیرعمر استفاده گردد. به محققان پیشنهاد می‌گردد در مطالعات آتی به نوسانات ارزش اتومبیل توجه داشته باشند تا مدل آن‌ها با این محدودیت سازگار شود. با توجه به این‌که علامت مقدار مورد انتظار اختلال تصادفی بر مبنای تقاضا تعیین می‌شود و ارزش اتومبیل در تعیین حق بیمه مؤثر است، نوسانات ارزش اتومبیل می‌تواند باعث اختلال در مدل پیشنهادی به‌صورت تغییرات زیاد تقاضای بیمه

سال‌های مختلف گردد، لذا ثبات ارزش اتومبیل می‌تواند به تعیین دقیق‌تر استراتژی تعیین حق بیمه منجر شود. عدم وجود اطلاعات دقیق و کامل حق بیمه شرکت‌های بیمه برای محاسبه متوسط حق بیمه بازار در سال‌های قبل از راه‌اندازی سامانه سنهاب بیمه مرکزی می‌تواند بر دقت مدل تأثیرگذار باشد.

منابع

پازوکی، نیما؛ شیرکوند، سعید؛ مهدوی کلیشمی، غدیر(۱۳۹۸). قیمت‌گذاری محصولات بیمه‌ای با استفاده از روش نسبت انحراف بالقوه از میانگین. *فصلنامه تحقیقات مالی*، ۲۱(۲)، ۱۶۵-۱۸۶.

پاینده نجف‌آبادی، امیرتیمور؛ عطاطلب، فاطمه؛ رضازاده، رمضان (۱۳۹۸). مدل تعیین حق بیمه نسبی یک سیستم نرخ گذاری‌شده براساس مدل پواسون آماسیده در دو نقطه، *فصلنامه پژوهشنامه بیمه*،۳۴(۲)،۹-۲۹.

شریفی‌سلیم، علیرضا؛ مؤمنی، منصور؛ مدرس یزدی، محمد؛ راعی، رضا(۱۳۹۴). برنامه‌ریزی تصادفی چندهدفه برای انتخاب سبد سهام. *فصلنامه مدیریت صنعتی*، ۷(۳)، ۴۹۰-۵۰۹.

فلاح لاجیمی، حمیدرضا؛ جعفرنژاد، احمد؛ مهرگان، محمدرضا؛ الفت، لعیا(۱۳۹۴). پیکره‌بندی شبکه زنجیر تأمین یکپارچه راهبردی تصادفی. *فصلنامه مدیریت صنعتی* ، 7(۱)، ۱۰۵-۴۷۷.

منطقی‌پور، مهناز. (۱۳۹۶). *تعیین نرخ‌های بهینه بیمه‌نامه‌های غیرعمر*، رساله دکتری، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز.

مؤمنی، منصور؛ رضایی، نادر (۱۳۸۷). مدل بهره‌برداری از سد ارس با استفاده از برنامه‌ریزی پویا. *فصلنامه مدیریت صنعتی*، ۱(۱)، ۱۳۲-۱۵۲.

References

Apergies, N., & Poufinas, T (2020). The role of insurance growth in economic growth: fresh evidence from a panel of OECD countries: *North American Journal of Economics and finance*. 53(C).101217.

Bertsekas, D. P. (2005). Dynamic programming and suboptimal control: A survey from ADP to MPC. *European Journal of Control*, *11*(4), 310-334.

Emms, P., & Haberman, S., 2005, Pricing general insurance using optimal control theory, *Astin Bulletin*, 35(2), 427–453.

Emms, P., Haberman, S. & Savoulli, I. (2007). Optimal strategies for pricing general insurance. *Insurance: Mathematics and Economics*, 40(1), 15–34.

Emms, P. (2008). A stochastic demand model for optimal pricing of non-life insurance policies. *Mathematical Control Theory and Finance*, Springer-Verlang Berlin Heidelberg, 113–136.

Emms, P. (2011). Pricing general insurance in a reactive and competitive market. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236(6), 1314–1332.

Falah Lagimi, H, & Jafarnezhad, A, & mehregan, M, & olfat, L. (2015). *Industrial Management journal*, 12(1), 82–110(*in Persian*).

Haugen, Kjetil kare. (2016). *Stochastic Dynamic Programming*. ISBN printed edition (print on demand): 978-82-15-02670-1, ISBN electronic pdf-edition: 978-82-15-02671-8.

Manteghipour, M. (2017). *Determination the Optimal Rates of Non-Life Insurance*. PhD Thesis. Faculty of Basic Sciences, Shahid Madani University of Azerbaijan. Tabriz (*in Persian).*

Mao, H., Carson, J.M., Ostaszewski, K. M., &Wen, Z. (2013) Optimal decision on dynamic insurance price and investment portfolio of an insurer. Insurance: Mathematics and Economics 52(2013), 359–369.

Mao, H., Carson, J.M., Ostaszewski, K. M (2017) Optimal Insurance Pricing, Reinsurance, and Investment for a Jump Diffusion Risk Process under a Competitive Market.

Momeni, M, & Rezaei, N (2008). Operation model of Aras dam using dynamic planning. Industrial Management *journal*, 1 (1), 132-152(*in Persian*).

Mourdoukoutas, F., Boonen, T. & Koo, B Pantelous, A I. (2021). Pricing in a competitive stochastic insurance market. *Insurance: Mathematics and Economics,* 97(2021)44-56.

Pantelous, A.A. & Passalidou, E. (2013). Optimal premium pricing policy in a competitive insurance market environment. *Annals of Actuarial Science*, 7(2), 175–191.

Pantelous, A.A. & Passalidou, E. (2015). Optimal premium pricing strategies for competitive general insurance markets. *Applied Mathematics and Computation*, 259, 858–874.

Pantelous, A.A. & Passalidou, E. (2016). Optimal strategies for a Non-linear premium-reserve model in a competitive insurance Market.*Annals of Actuarial Science, 11(1),* 1–19.

Payandeh Najaf Abadi, A, & Atatalab, F, & Rezazadeh, R. (2019). Calculation of the Relative Premium based on Two-Point Inflated Poisson Model for Rate-Making System. *Journal of insurance research* .34(2), 9 –29 (*in Persian*).

Pazoki, N, & shirkavand, S, & mahdavi kalishami, G. (2019). Insurance products ratemaking and insurance company financial solvency ratio calculation via potential deviation ratio .*Financial research journal*, 21(2), 165–186 *(in Persian).*

Sharifi Salim, A, & Momeni, M, & Modares Yazdi, M, & Rai, R. (2015). Multi-objective random scheduling for stock portfolio selection. *Industrial Management journal,* 7(3),489-510(*in Persian*).

Taylor, G.C. (1986). Underwriting strategy in a competitive insurance environment. *Insurance: Mathematics and Economics*, 5(1), 59–77.

Taylor, G.C. (1987). Expenses and underwriting strategy in competition. Insurance: *Mathematics And Economics*, 6 (4), 275–287.

Werner, G., Modlin, C. (2016), *Basic RateMaking,* Casualty Actuarial Society.