


## Multiscale analysis of GPS velocity fields in the oblique collision zone of Arabia-Eurasia tectonic plates using spherical wavelet

Rastbood, A.<sup>1</sup> 

1. Department of Surveying, Faculty of Civil Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran.

Corresponding Author E-mail: [arastbood@tabrizu.ac.ir](mailto:arastbood@tabrizu.ac.ir)

(Received: 6 April 2022, Revised: 31 Dec 2022, Accepted: 26 Sep 2023, Published online: 15 Nov 2023)

### Summary

GPS velocity fields consist of a set of geodetic observations of displacement with an irregular spatial distribution on the sphere. In this study, multiscale analysis based on spherical wavelet is used to estimate the GPS velocity field in the oblique collision zone of Arabia-Eurasia tectonic plates. Multiscale velocity field estimation is well suited for dense geodetic networks and is straightforward to implement.

We show that for DOG wavelet a scale of 3 to 8 is suitable for GPS velocity field analysis in the study area. Estimation output can be used as a data layer in GIS analysis. Regularization is required to obtain a smooth estimated velocity field from the discrete observations. This is achieved through two possible actions. First, one can cull the set of possible spherical wavelets based on the coverage of observations. If each spherical wavelet has a sufficient number of observations constraining its coefficient, then no regularization is needed ( $\lambda = 0$ ). Second, if all spherical wavelets are used for the inverse problem, then extensive regularization will be needed, since most wavelets will have zero observations for constraining their corresponding coefficients. In this research, we have chosen something in between these two extreme cases, where we at the outset eliminate many candidate spherical wavelets based on data coverage, but we still require a moderate amount of explicit regularization in the inversion.

As the adopted spherical wavelets are analytically differentiable, spatial gradient tensor quantities such as strain rate, dilatation rate and rotation rate can be directly computed using the same coefficients. The gradient quantities are then calculated directly from the estimated field to identify potential deformation signals. The first factor controlling the estimation is the distance between the network stations. Wherever stations are dense, short-scale spherical wavelets participate in the estimation; and where stations are sparse, only long-scale spherical wavelets are used to do the estimation. As we allow shorter length-scale frame functions to be used in estimating the velocity field, the residual field vectors decrease in magnitude. The smallest residuals occur at observation points that are dense enough to fall within the support of the smallest length-scale frame functions which also have the smallest estimated uncertainties in the data. The largest residuals overall are associated with the largest uncertainties in the data.

From the perspective of monitoring a GPS network, the residual map may be helpful in detecting spurious behaviour of singles at stations. If unusual strain, dilation, or rotation are observed around a station, such an observation would warrant additional analysis of the GPS time-series and error estimate. We remove a rotational field from the observation set to obtain the velocity field. We then estimate the horizontal velocity field. Once we have estimated the multiscale velocity field, we can readily compute other scalar quantities, such as dilatation, strain and rotation. The high density of stations near the fault system could capture the spatial gradient in the velocity field, and give rise to estimate strain-rates with a maximum of  $1.410 \times 10^{-7}$ , an average of  $1.786 \times 10^{-8}$  and a standard deviation of  $1.626 \times 10^{-8}$  per year. The dilation rate is obtained with a maximum of  $-8.684 \times 10^{-8}$ , an average of  $-3.487 \times 10^{-9}$  and a standard deviation of  $1.144 \times 10^{-8}$  per year and the rotation rate is obtained with a maximum of  $7.771 \times 10^{-8}$ , an average of  $7.720 \times 10^{-9}$  and a standard deviation of  $7.040 \times 10^{-9}$  radians per year in the study area.

Due to the shorter distance of observation stations in the southern part of central Alborz and northwestern Iran, the values of strain, dilatation and rotation rate can be observed in these areas on large scales.

In multiscale estimation, the residual field between the original field and estimated field may reveal two key features. First, if there are systematic residuals in a particular region, then it is probable that one needs to include shorter-scale wavelets in the estimation. Second, if there is a strong residual at a single station, then the station is anomalous and is either malfunctioning or is capturing a signal that is not spatially resolved. The advantages of the multiscale approach are its ability to localize the deformation field in space and scale, as well as its ability to identify outliers in the set of observations. This approach can also locally match the smallest process obtained with the local density of observations, thus maximizing both the amount of information extracted and the possibility of comparing the resulting quantities in different regions of a scale. Multiscale estimation of the three-dimensional GPS velocity field is also possible using spherical wavelet frame functions. The vertical component, if any, should be used to estimate the velocity field, as deformation may not be predominant in horizontal directions. This formulation may be easily applied either regionally or globally and is ideally suited as the spatial parametrization used in any automatic time-dependent geodetic transient detector.

**Keywords:** spherical wavelet, GPS velocity field, crustal deformation, Arabia-Eurasia.

Cite this article: Rastbood, A. (2023). Multiscale analysis of GPS velocity fields in the oblique collision zone of Arabia-Eurasia tectonic plates using spherical wavelet. *Journal of the Earth and Space Physics*, 49(3), 541-656. DOI: <http://doi.org/10.22059/jesphys.2023.340395.1007412>



# آنالیز چندمقیاسی میدان سرعت GPS در محدوده برخورد مایل صفحات زمین‌ساختی عربستان-اوراسیا با استفاده از موجک کروی

اصغر راست‌بود<sup>۱</sup> ✉

۱. گروه نقشه برداری، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران.

رایانامه نویسنده مسئول: [arastbood@tabrizu.ac.ir](mailto:arastbood@tabrizu.ac.ir)

(دریافت: ۱۴۰۱/۱۱/۱۷، بازنگری: ۱۴۰۱/۱۰/۱۰، پذیرش نهایی: ۱۴۰۲/۷/۴، انتشار آنلاین: ۱۴۰۲/۸/۲۴)

## چکیده

میدان‌های سرعت GPS متشکل از مجموعه مشاهدات جابه‌جایی با توزیع مکانی نامنظم روی کره هستند. در این تحقیق آنالیز چندمقیاسی براساس موجک کروی برای برآورد میدان سرعت GPS در محدوده برخورد مایل صفحات زمین‌ساختی عربستان-اوراسیا انجام می‌شود. از آنجایی که موجک کروی مورد استفاده به صورت تحلیلی مشتق‌پذیر است، کمیت‌های حاصل از تانسور گرادیان جابه‌جایی مانند نرخ کرنش، اتساع و دوران نیز قابل محاسبه هستند. نخست قابلیت رویکرد چندمقیاسی در مدل‌سازی با داده‌های شبیه‌سازی نشان داده شده و سپس داده‌های واقعی بررسی می‌شوند. مهم‌ترین ویژگی این رویکرد تفکیک‌پذیری مکانی و مقیاسی جابه‌جایی و کمیت‌های اسکالر مستخرج از آن است. همچنین این رویکرد قابلیت استخراج بیشترین اطلاعات به صورت محلی را بر اساس تراکم ایستگاه‌های مشاهداتی با تنظیم خودکار مقیاس‌های مورد استفاده توسط موجک کروی دارد. به این ترتیب هم حجم اطلاعات استخراجی به صورت خودکار به حداکثر رسیده و هم امکان مقایسه نتایج در مقیاس مشخص و مناطق مختلف فراهم می‌شود. سایر روش‌های معمول مدل‌سازی عددی نظیر امان محدود و تفاضل محدود فاقد این ویژگی‌ها هستند. مطابق بررسی انجام شده در این تحقیق با در نظر گرفتن تراکم ایستگاه‌های GPS، مقیاس‌های ۳ الی ۸ موجک تفاضل گاوسی برای تحلیل میدان سرعت GPS در منطقه مورد مطالعه مناسب تشخیص داده شد. کوچک‌ترین باقی‌مانده‌ها در نقاط مشاهده‌ای رخ می‌دهند که به اندازه کافی متراکم هستند و در محمل توابع چارچوب با مقیاس طولی کوچک‌تر قرار می‌گیرند. با استفاده از میدان سرعت برآورد شده نرخ کرنش، اتساع و دوران به ترتیب با میانگین‌های  $1.786 \times 10^{-8}$ ،  $3.487 \times 10^{-9}$  بر سال و  $7.720 \times 10^{-9}$  رادیان در سال برای منطقه مورد مطالعه به دست آمد.

واژه‌های کلیدی: موجک کروی، میدان سرعت GPS، تغییرشکل پوسته، عربستان-اوراسیا.

## ۱. مقدمه

تغییرشکل پوسته زمین در مقیاس‌های افقی و قائم مختلف رخ می‌دهد. به عنوان مثال، می‌توان مقیاس ۵۰۰۰ کیلومتری را با نشانه بازگشت ایزوستاتیک پس از یخبندان پوسته مرتبط کرد (والکات، ۱۹۷۳؛ سیمونز و هاگر، ۱۹۹۷)، مقیاس ۱۰۰ کیلومتر احتمالاً می‌تواند برای مرز صفحات خاص مناسب باشد، یا مقیاس ۱۰ کیلومتر احتمالاً مناسب برای تغییرشکل محلی یک حوضه ناشی از تغییرات هیدرولوژیکی بوده (آرگوس و همکاران، ۲۰۰۵) و مقیاس ۱ کیلومتری ممکن است برای تشخیص اثر یک گسل کم عمق قفل شده از یک گسل لغزنده غیرلرزه‌ای

استفاده شود (سویج و پریسکات، ۱۹۷۶). مطالعات مبتنی بر GPS تغییرشکل پوسته را می‌توان به مدل‌های فیزیکی و غیرفیزیکی طبقه‌بندی کرد. از مدل‌های فیزیکی وابسته به زمان می‌توان به تحقیقات مید و همکاران (۲۰۰۲)، مید و هاگر (۲۰۰۵)، بکر و همکاران (۲۰۰۵) و مک کافری و همکاران (۲۰۰۷) اشاره کرد. هکی (۱۹۹۷)، دراگت و همکاران (۲۰۰۱) و مک گوایر و سگال (۲۰۰۳) نیز به تحقیقاتی مرتبط با مدل‌سازی فیزیکی وابسته به زمان پرداخته‌اند. از بین مدل‌سازی‌های غیرفیزیکی نیز می‌توان به تحقیقات وارد (۱۹۹۸a,b)، بیوان

جداسازی فرایندهایی را که در مقیاس‌های مکانی مختلف رخ می‌دهند، امکان‌پذیر می‌سازد.

هدف اصلی این تحقیق ارائه یک نمایش چندمقیاسی مبتنی بر موجک کروی از میدان سرعت مسطح‌حاتی GPS، به‌عنوان ابزاری برای تسهیل تحلیل مشاهدات ژئودزی شبکه‌های متراکم GPS در محدوده برخورد مایل صفحه‌های زمین‌ساختی عربستان-اوراسیا است. در این تحقیق یک میدان سرعت برداری چندمقیاسی پیوسته با استفاده از توابع موجک کروی از یک مجموعه مشاهدات گسسته در سطح زمین برآورد می‌شود. این توابع قبلاً برای تعیین مشخصات سایر سیگنال‌های ژئوفیزیکی مانند میدان‌های جاذبی و مغناطیسی مورد استفاده قرار گرفته‌اند (فریدن و ویندهویزر، ۱۹۹۷؛ بایر و همکاران، ۲۰۰۱؛ هولشایدنر و همکاران، ۲۰۰۳؛ شامبودو و همکاران، ۲۰۰۵). در مقایسه با رویکردهای قبلی در مورد سرعت سطحی یا مسئله کرنش، جنبه‌های جدید رویکرد به کار گرفته شده در این تحقیق عبارت‌اند از: (۱) تجزیه صریح و سازگار میدان سرعت به مقیاس‌های مختلف در همه نقاط. (۲) حداقل مقیاسی که با آن میدان سرعت در یک مکان خاص برآورد می‌شود توسط پوشش ایستگاه‌های محلی تعیین می‌شود. (۳) پشتیبانی از مشاهدات قائم سرعت در صورت قابل دسترس بودن و (۴) استفاده از موجک‌های کروی برای نمایش میدان سرعت.

هدف از توسعه نمایش چندمقیاسی سرعت‌های سطحی، مشارکت آن در چارچوب یک آشکارساز ژئودزی وابسته به زمان رویدادهاست. چندین تحقیق از مشاهدات GPS برای آشکارسازی موارد تغییر شکل گذرای پوسته استفاده کرده‌اند: به‌عنوان مثال، مناطق فرورانشی ژاپن (هکی، ۱۹۹۷؛ اوزاوا و همکاران، ۲۰۰۲؛ میازاکی و همکاران، ۲۰۰۳؛ ۲۰۰۴)، آندز (ملبورن و همکاران، ۲۰۰۲؛ پریچارد و سیمونز، ۲۰۰۶) و کاسکادیا (دراگت و همکاران، ۲۰۰۱؛ روگرت و دراگت، ۲۰۰۳). این مثال‌ها رویدادهایی هستند که هدف شناسایی آنها به‌صورت خودکار است، که به‌واسطه آن مقیاس زمانی و مکانی رویداد مشخص شود. تجزیه میدان سرعت به موجک‌ها

و هاینز (۲۰۰۱)، اسپکمن و نیست (۲۰۰۲) و تیپ و همکاران (۲۰۰۹) اشاره کرد. هدف مدل‌سازی فیزیکی ارائه یک توصیف فیزیکی از سیستم است که اغلب به شکل مدل‌های بلوک کشسان با مجموعه‌ای از گسل‌ها است. مدل‌های غیرفیزیکی، مانند آنچه در این تحقیق آمده است، از توابع ریاضی مناسب برای برآورد میدان‌های سرعت استفاده می‌کنند. هر دو رویکرد محاسن خاص خود را دارند. تأکید روی رویکرد غیرفیزیکی، شناسایی سیگنال‌های ضعیف وابسته به زمان با منشأ ناشناخته علاوه بر حرکت دائمی صفحه است.

مطالعات قبلی که به‌طور مستقیم یا غیرمستقیم یک مدل سرعت را در مقیاس مکانی متغیر یا شبه‌یکنواخت از داده‌های GPS برآورد کرده‌اند، با رویکرد چندمقیاسی متفاوت هستند. در رویکرد مقیاس‌متغیر، تفکیک‌پذیری مدل در منطقه مشاهدات، متغیر است. دو مورد از رویکرد مقیاس‌متغیر عبارت‌اند از: (۱) برآورد کلاسیک کرنش با استفاده از یک شبکه مثلث‌بندی (فیگل و همکاران، ۱۹۹۰)، که به‌موجب آن مقیاس بر اساس فاصله بین ایستگاه‌های مجاور تغییر می‌کند و (۲) برآورد نرخ لغزش در گسل‌هایی که بلوک‌های صلب یا کشسان را از هم جدا می‌کنند (مید و همکاران ۲۰۰۲)، که به‌موجب آن مقیاس به هندسه بلوک‌ها در مدل وابسته است. در رویکرد مقیاس شبه‌یکنواخت، از یک پارامتر مقیاس استفاده می‌شود، که یا بر اساس فاصله در یک شبکه تقریباً یکنواخت از نقاط برآورد است (هاینز و هولت، ۱۹۹۳؛ بیوان و هاینز، ۲۰۰۱) یا بر اساس استفاده صریح از پارامتری است که مشاهدات را بر اساس فاصله از نقطه برآورد وزن‌دهی می‌کند (شن و همکاران، ۱۹۹۶؛ وارد، ۱۹۹۸b؛ هسو و همکاران، ۲۰۰۹). استفاده از اصطلاح شبه‌یکنواخت به این دلیل است که تفکیک‌پذیری میدان سرعت (یا میدان نرخ کرنش) بسته به تراکم مکانی مشاهدات متغیر است. در مقایسه با تمام این رویکردها، در رویکرد چندمقیاسی، مقدار واقعی میدان در یک نقطه مکانی معین، از برهم‌نهی مقادیر در مقیاس‌های مختلف مکانی به‌دست می‌آید. رویکرد چندمقیاسی به‌طور طبیعی

برای نمایش سیگنال‌ها فراهم می‌کند. افزونگی چارچوب‌ها به‌ویژه زمانی که هدف تقریب سیگنال با تعداد کمی از توابع است مفید خواهد بود. در این تحقیق موجک‌های کروی به‌عنوان توابع چارچوب انتخاب شده‌اند. هر میدان سرعت در روی کره را می‌توان به صورت ترکیب خطی از موجک‌های کروی نمایش داد. در ادامه مسئله معکوس تعیین ضرایب موجک‌های کروی توصیف‌کننده میدان سرعت بر اساس مجموعه مشاهدات نقطه‌ای با توزیع نامنظم توضیح داده می‌شود. در این تحقیق رویکرد کمترین مربعات با فرض توزیع گاوسی برای خطای داده‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

## ۱-۲. برازش داده‌های پراکنده بر روی کره

برازش داده‌های پراکنده بر روی کره مسئله جدیدی نیست و با استفاده از رگرسیون محلی (هستینگ و لودر، ۱۹۹۳؛ شن و همکاران، ۱۹۹۶؛ تزا و همکاران، ۲۰۰۸)، روش‌های مبتنی بر کرنل (سیلورمن، ۱۹۸۶)، روش‌های آماری مانند کریجینگ (ماترون، ۱۹۶۳؛ رگوزونی و همکاران، ۲۰۰۵)، روش‌های مبتنی بر اسپلاین (واها، ۱۹۸۱)، راست‌بود (۱۴۰۲الف) یا برآورد یک میدان هموار با استفاده از بسط توابع پایه (مانند هارمونیک‌های کروی)، با اعمال یک قید هموارسازی برای پایدارسازی وارونگی (بیوان و هاینز، ۲۰۰۱) مورد بررسی قرار گرفته است. رویکرد مورد استفاده در این تحقیق در دسته آخر قرار می‌گیرد، با این تفاوت که از توابع پایه یک کلاس خاص از موجک‌ها که روی کره تعریف شده‌اند استفاده می‌کند (تیب و همکاران، ۲۰۰۹).

موقعیت وابسته به زمان ایستگاه GPS  $\tilde{z}$  در یک شبکه با  $x_i(t)$  نشان داده می‌شود که سیستم مختصات آن یک چارچوب مرجع خارجی است (به‌عنوان مثال ITRF یا اوراسیا). ایستگاه در بازه زمانی،  $\Delta t$ ، به اندازه  $\Delta x_i$  حرکت می‌کند، و بنابراین سرعت ایستگاه در این بازه حرکت  $v_i = \Delta x_i / \Delta t$  است.

میدان سرعت تعریف شده بر روی کره‌ای به شعاع  $R$  را

به‌طور خودکار بر رفتار همبسته محلی با تکیه بر کمیت‌های استنباط شده از چندین ایستگاه مجاور متکی بوده و براهمیت تک‌تک ایستگاه‌ها تأکیدی ندارد. در زمینه آشکارسازی رویداد گذرا انتظار می‌رود که تأکید بر رفتار همبسته محلی، به‌جای استفاده از سری‌های زمانی منفرد برای تشخیص، حساسیت بیشتری را هنگام جست‌وجوی رویدادهای غیرعادی ایجاد کند. به‌عنوان نتیجه، برخی از منابع نویز در مجموعه داده‌های GPS، مانند خطای چارچوب مرجع، به‌طور طبیعی در مقیاس‌های خاص قرار می‌گیرند، در نتیجه مقیاس‌های دیگر واضح‌تر بوده و حساس‌تر به فرایندهای گذرا می‌شوند.

در بخش ۲، رویکرد چندمقیاسی با استفاده از موجک‌های کروی برای تجزیه میدان‌های سرعت مطرح می‌شود. جنبه‌های چندمقیاسی با استفاده از موجک‌هایی از شبکه‌های ریزتر به دست می‌آیند، البته فقط در مواردی که بر اساس تراکم محلی ایستگاه‌ها قابل توجه باشد. از هر میدان سرعت برآورد شده، می‌توان به‌طور خودکار نقشه‌هایی از مقادیر اسکالر را محاسبه کرد که در تفسیر تغییرشکل پوسته مفید هستند؛ مانند نرخ کرنش، اتساع و دوران (بخش ۳). در بخش ۴، این رویکرد با استفاده از میدان سرعت مسطحاتی IPGN برای منطقه برخورد مایل صفحات زمین‌ساختی عربستان-اوراسیا نشان داده خواهد شد. نهایتاً، در بخش ۵، مفاهیم مربوط به این رویکرد و زمینه‌هایی برای توسعه و بهبود آن مورد بحث قرار می‌گیرد.

## ۲. برآورد میدان‌های سرعت GPS

نخست توابع چارچوب برای نمایش مؤلفه‌های میدان سرعت سه‌بعدی روی کره معرفی می‌شوند. چارچوب مجموعه‌ای از توابع است که کل فضا را پوشش می‌دهد، ولی لزوماً مستقل خطی نیستند. چارچوب‌های مورد استفاده در این تحقیق توابع انتگرال‌پذیر مربعی هستند. مفهوم چارچوب کلی‌تر بوده و نسبت به مفهوم پایه محدودیت کمتری دارد، بنابراین انعطاف‌پذیری بیشتری

می توان به صورت زیر نوشت:

$$v(\theta, \phi) = v_r(\theta, \phi)\hat{r} + v_\theta(\theta, \phi)\hat{\theta} + v_\phi(\theta, \phi)\hat{\phi}, \quad (1)$$

که در آن  $\hat{r}$  راستای قائم،  $\hat{\theta}$  راستای شمال-جنوب، و  $\hat{\phi}$  راستای شرق-غرب است. هدف برآورد میدان سرعت  $v(\theta, \phi)$  با استفاده از مشاهدات انجام شده در  $N$  ایستگاه با توزیع نامنظم، با مختصات  $(\theta_i, \phi_i), i = 1, \dots, N$  است. فرض بر این است که این مشاهدات که با

$$v^i = (v_r^i, v_\theta^i, v_\phi^i) \quad (2)$$

$$= [v_r(\theta_i, \phi_i), v_\theta(\theta_i, \phi_i), v_\phi(\theta_i, \phi_i)] \quad (3)$$

مشخص شده اند آلوده به نویز هستند. هدف توصیف تابعی میدان سرعت  $v(\theta, \phi)$  با قابلیت سازگار شدن با مقیاس به صورت محلی در رابطه با تراکم محلی ایستگاه های GPS است. همچنین این توصیف امکان جداسازی میدان سرعت در مقیاس های مکانی مرتبط با پدیده های فیزیکی مختلف یا منابع نویز متفاوت را فراهم می سازد.

## ۲-۱-۱. موجک روی کره

تمایل به تمایز مؤثر بین پدیده های متعدد و منابع نویز که ممکن است در یک مجموعه داده وجود داشته باشند، انگیزه استفاده از نمایش مکانی-طیفی (یا چندمقیاسی) است (سیمونز و هاگر، ۱۹۹۷؛ سیمونز و همکاران، ۱۹۹۷). موجک ها یک نمایش طبیعی برای سیگنال های چندمقیاسی ارائه می دهند. توسعه تجزیه و تحلیل موجک به رویه کروی یک زمینه تحقیقاتی فعال در ۲۵ سال اخیر بوده است (دالکه و ماس، ۱۹۹۶؛ فریدن و ویندهویزر، ۱۹۹۶؛ ۱۹۹۷؛ هولشنايدر، ۱۹۹۶؛ سیمونز و هاگر، ۱۹۹۷؛ آنتوان و واندرگهینست، ۱۹۹۹؛ بوگدانوا و همکاران، ۲۰۰۵؛ ویاکس و همکاران، ۲۰۰۵). کاربرد موجک ها در ژئوفیزیک شامل آنالیز میدان مغناطیسی و میدان ثقل زمین است (هولشنايدر و همکاران، ۲۰۰۳؛ شامبودو و همکاران، ۲۰۰۵). یک کاربرد دیگر موجک ها برای میدان دمای جهانی توسط اوه و لی (۲۰۰۴) ارائه شده است.

به منظور تعریف آنالیز موجک در فضای  $L^2(S^2)$  از توابع انتگرال پذیر مربعی بر روی کره واحد، دو عملیات پایه مورد نیاز است: دوران، و اتساع. مشکل عمده در به دست آوردن موجک روی کره در تعریف عملگر اتساع مناسب است که در تئوری موجک به طور مستقیم با مفهوم مقیاس مرتبط است. در این تحقیق از رویکرد پیشنهاد شده توسط آنتوان و واندرگهینست (۱۹۹۹) استفاده شده است، که به موجب آن موجک های کروی پیوسته از موجک های اقلیدسی با تصویر استریوگرافیک معکوس به دست می آیند. راه حل جایگزین استفاده از موجک های کروی ساخته شده از هارمونیک های کروی است (هولشنايدر و همکاران، ۲۰۰۳؛ سیمونز و همکاران، ۲۰۰۶؛ گیلوکس و همکاران، ۲۰۰۹).

بوگدانوا و همکاران (۲۰۰۵) ثابت کردند که تصویر استریوگرافیک معکوس هر موجک دو بعدی در  $R^2$  یک موجک قابل قبول روی کره ایجاد می کند. این نتیجه مهم به تنوع زیادی از انتخاب ها برای موجک های کروی منجر می شود. در این تحقیق از موجک کروی تفاضل گاوسی (DOG) استفاده شده که یک تابع با تقارن محوری است. این موجک کروی از اختلاف تصویر استریوگرافیک معکوس یک گاوسی همسانگرد و نسخه اتساعی آن به دست می آید. نمونه ای از موجک کروی DOG و طیف آن در شکل ۱ نشان داده شده است.

دوران با زوایای اوایلر  $(\phi, \theta, \alpha)$  یک تابع متقارن متناظر با مرکزیت تابع در قطب  $(\theta, \phi)$  است. بنابراین، با اعمال اتساع و دوران به موجک کروی مادر متقارن محوری  $\psi$  با مرکزیت، مثلاً قطب شمال، مجموعه نامتناهی  $\{\psi_{x,a}, x \in S^2, a > 0\}$  از موجک های کروی با مقیاس  $a$  و با مرکزیت قطب  $x$  می تواند تولید شود.

تجزیه میدان سرعت روی کره به مجموعه موجک های کروی گسسته باید کل فضای  $L^2(S^2)$  را پوشش دهد، ولی نیازی به مجموعه مستقل خطی نیست. همان طور که قبلاً نیز توضیح داده شد، این مجموعه گسسته از توابع که ضرورتی برای مستقل خطی بودن آن وجود ندارد و دارای ویژگی پوشش کل فضای تابع است، چارچوب نامیده

کره، مجموعه‌ای گسسته و متناهی از موجک‌های کروی  $DOG$ ، با مقیاس‌های مختلف، در مرکز نقاط شبکه خواهد بود.

$$\mathcal{F}_{q_{max}} = \{\psi_{x_{(q,j)}, a_q}(x), x_{(q,j)} \in \mathcal{G}_q, q = 0, \dots, q_{max}\} \quad (۴)$$

که در آن  $a_q = 2^{-q}$  نشان‌دهنده مقیاس گسسته است. مقادیر معقول  $q_{max}$  برای تقریب میدان‌های سرعت از ۷ تا ۹ متغیر بوده و به ترتیب با مقیاس ۵۵ تا ۱۴ کیلومتر در سطح زمین متناظر است ( $\bar{L}_q$  در جدول ۱).

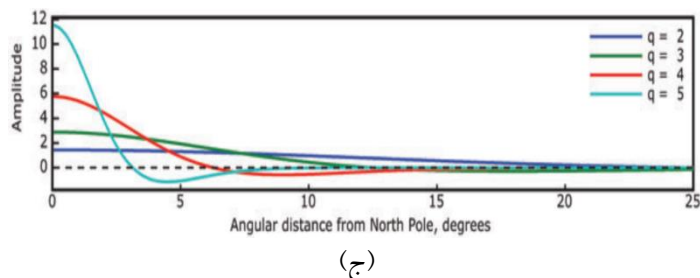
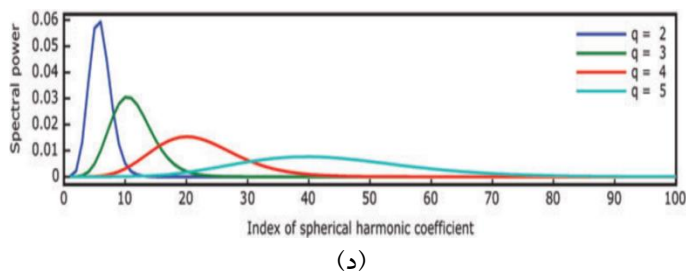
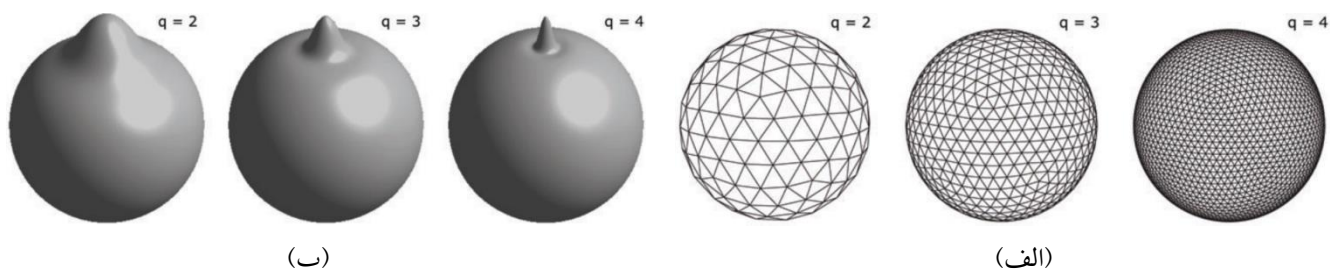
۲-۲. تجزیه میدان سرعت بر حسب موجک‌های کروی

فرض می‌شود که مرتب‌سازی بر روی عناصر  $\mathcal{F}_{q_{max}}$  به صورت  $\mathcal{F}_{q_{max}} = \{g_k(x), k = 1, \dots, M\}$  برقرار شده است. هر تابع اسکالر  $f \in L^2(S^2)$  که پهنای باند آن از پهنای باند مربوط به کوچک‌ترین مقیاس  $q_{max}$  بیشتر نشود، را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \sum_{k=1}^M m_k g_k(x) = g^T(x)m. \quad (۵)$$

می‌شود. منحصر به فرد نبودن ذاتی چارچوب با استفاده از منظم‌سازی حل می‌شود (کوواچویچ و چیرا، ۲۰۰۷، الف و ب). بوگدانوا و همکاران (۲۰۰۵) نشان دادند که با نمونه‌برداری مناسب از مجموعه موجک‌های کروی  $DOG$  می‌توان یک چارچوب گسسته به دست آورد. این نمونه‌برداری مستلزم گسسته‌سازی هر دو موقعیت  $x$  و مقیاس  $a$  است. گسسته‌سازی موقعیت به معنای تعریف مجموعه‌ای از شبکه‌های  $\mathcal{G}_q$  روی کره، برای مجموعه‌ای از تفکیک‌پذیری‌های  $q$  است. هر شبکه با تقسیم‌بندی متوالی یک بیست‌وجهی اولیه  $\mathcal{G}_0$  به دست می‌آید، که به موجب آن هر مثلث به چهار مثلث متساوی‌الاضلاع جدید تقسیم می‌شود و رئوس جدید به روی کره تصویر می‌شوند. سه شبکه از این نوع ( $\mathcal{G}_2$  و  $\mathcal{G}_3$ ،  $\mathcal{G}_4$ ) در شکل ۱-الف نشان داده شده است. گسسته‌سازی پارامتر مقیاس به مجموعه تفکیک‌پذیری‌های انتخاب شده برای شبکه کروی بستگی دارد.

یک چارچوب از میدان‌های سرعت با باند محدود روی



شکل ۱. توابع چارچوب موجک کروی (تیپ و همکاران، ۲۰۰۹). الف. شبکه‌های کروی مثلث‌بندی شده که برای تعیین موقعیت مراکز توابع چارچوب موجک کروی مورد استفاده قرار می‌گیرند. از چپ به راست شبکه‌ها با مقیاس  $q = 2$  (۱۶۲ رأس)،  $q = 3$  (۶۴۲ رأس) و  $q = 4$  (۲۵۶۲ رأس) هستند. ب. سه مقیاس مختلف از موجک کروی  $DOG$  (تفاضل گاوسی) با مرکزیت در قطب شمال. (ج). پروفیل‌های متناظر با موجک‌ها در (ب) به ازای طول جغرافیایی ثابت  $\phi$ . (د) طیف متناظر موجک‌ها در (ب).

جدول ۱. خصوصیات هندسی شبکه‌های مثلثی-کروی، مطابق وانگ و دالن (۱۹۹۵).

مقیاس، $q$	وجوه، $F_q$	رئوس، $V_q$	متوسط طول کماتی ضلع، $\bar{L}_q$		حداکثر پهنای باند قابل‌نمای، $\bar{l}_q$
۰	۲۰	۱۲	$63/435^\circ$	$7053/64 \text{ km}$	۳
۱	۸۰	۴۲	$31/718^\circ$	$3526/82 \text{ km}$	۶
۲	۳۲۰	۱۶۲	$15/859^\circ$	$1763/41 \text{ km}$	۱۱
۳	۱۲۸۰	۶۴۲	$7/929^\circ$	$881/71 \text{ km}$	۲۳
۴	۵۱۲۰	۲۵۶۲	$3/965^\circ$	$440/85 \text{ km}$	۴۵
۵	۲۰۴۸۰	۱۰۲۴۲	$1/982^\circ$	$220/43 \text{ km}$	۹۱
۶	۸۱۹۲۰	۴۰۹۶۲	$0/991^\circ$	$110/21 \text{ km}$	۱۸۲
۷	۳۲۷۶۸۰	۱۶۳۸۴۲	$0/496^\circ$	$55/11 \text{ km}$	۳۶۳
۸	۱۳۱۰۷۲۰	۶۵۵۳۶۲	$0/248^\circ$	$27/55 \text{ km}$	۷۲۶
۹	۵۲۴۲۸۸۰	۲۶۲۱۴۴۲	$0/124^\circ$	$13/78 \text{ km}$	۱۴۵۳
۱۰	۲۰۹۷۱۵۲۰	۱۰۴۸۵۷۶۲	$0/62^\circ$	$6/89 \text{ km}$	۲۹۰۶
۱۱	۸۳۸۱۶۰۸۰	۴۱۹۴۳۰۴۲	$0/31^\circ$	$3/44 \text{ km}$	۵۸۱۱
۱۲	۳۳۵۵۴۳۲۰	۱۶۷۷۷۲۱۶۲	$0/16^\circ$	$1/72 \text{ km}$	۱۱۶۲۳
$q$	$F_q = 20 \times 4^q$	$V_q = 10 \times 4^q + 2$	$\bar{L}_q = 2^{-q} \bar{L}_0$		$\bar{l}_q = \text{int}(\pi / \bar{L}_q)$

$$\begin{aligned}
 v_r^i &= \sum_{k=1}^M a_k g_k(\theta_i, \phi_i) + n_r^i, v_\theta^i \\
 &= \sum_{k=1}^M b_k g_k(\theta_i, \phi_i) + n_\theta^i, v_\phi^i \\
 &= \sum_{k=1}^M c_k g_k(\theta_i, \phi_i) + n_\phi^i,
 \end{aligned}
 \quad (7)$$

که در آن  $n_r^i, n_\theta^i, n_\phi^i$  نویز اندازه‌گیری‌ها را نشان می‌دهند. در ادامه به بررسی برآورد یک میدان اسکالر کروی عمومی  $f(x)$  از  $N$  نقطه نمونه با توزیع نامنظم  $x_i, i = 1, \dots, N$  پرداخته می‌شود:

$$f_i = f(x_i) = g^T(x_i)m + n_i. \quad (8)$$

معادله (۸) را می‌توان به شکل ماتریسی نوشت:

$$f = Gm + n, \quad (9)$$

که در آن بردار اندازه‌گیری‌ها،  $f \in R^N$  بردار اندازه‌گیری‌ها،  $G \in R^{N \times M}$  ماتریس طرح با  $G_{ik} = g_k(x_i)$  و  $m \in R^M$  بردار پارامترهای مدل است.

از آنجایی که چارچوب  $F_{qmax}$  یک مبنای متعامد نیست، مسئله یافتن ضرایب بهینه  $m_k$  نامعین بوده و دارای جواب منحصر به فرد نیست. با این حال، با استفاده از نوعی منظم‌سازی، یک نمایش بهینه منحصر به فرد را می‌توان یافت. در بخش بعدی به موضوع منظم‌سازی پرداخته می‌شود. مسئله تقریب میدان سرعت برداری را می‌توان به سه مسئله برآورد اسکالر کاهش داد. اگر هر کدام از سه مؤلفه مربعی انتگرال‌پذیر، با پهنای باند کوچک‌تر از  $\bar{l}_{qmax}$  باشد، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
 v(\theta, \phi) &= \sum_{k=1}^M [a_k g_k(\theta, \phi) \hat{r}(\theta, \phi) \\
 &\quad + b_k g_k(\theta, \phi) \hat{\theta}(\theta, \phi) \\
 &\quad + c_k g_k(\theta, \phi) \hat{\phi}(\theta, \phi)].
 \end{aligned}
 \quad (6)$$

ارزیابی رابطه (۶) در ایستگاه‌های مشاهداتی  $(\theta_i, \phi_i), i = 1, \dots, N$  (که اندازه‌گیری‌های نویزی  $(v_r^i, v_\theta^i, v_\phi^i)$  به آنها مرتبط است)، به روابط زیر منجر می‌شود:

تشکیل نمی‌دهند، بلکه سازنده چارچوب هستند. جواب معادله (۱۰) توسط (منکه، ۱۹۸۹) به صورت زیر ارائه شده است:

$$m = (G^T C_D^{-1} G + \lambda^2 S)^{-1} G^T C_D^{-1} d. \quad (13)$$

پارامتر  $\lambda$  با اعتبارسنجی متقابل معمولی (OCV) انتخاب می‌شود، که تمایل دارد مدل‌هایی را انتخاب کند که دقیق‌تر از رویکرد متقابل منحنی  $L$  معمولی است (شکل ۹).

کوواریانس پسین داده‌ها به صورت زیر خواهد بود (تارانتولا، ۲۰۰۵)

$$\tilde{C}_D = G(G^T C_D^{-1} G + \lambda^2 S)^{-1} G^T, \quad (14)$$

با تناظر مابین ماتریس کوواریانس مدل و ماتریس منظم‌سازی که توسط  $C_M = (\lambda^2 S)^{-1}$  ارائه می‌شود. می‌توان از  $\tilde{C}_D$  برای محاسبه پوشش ترسیم میدان سرعت برآوردی استفاده کرد.

#### ۲-۴. انتخاب توابع چارچوب

تا کنون حد بالا یا پایینی برای مقیاس موجک‌های کروی که در مسئله برآورد استفاده می‌شود، مشخص نشده است. در جدول ۱، شبکه‌های کروی با مقیاس  $q = 0 \sim 12$  لیست شده است. برای هر شبکه  $2 + 10 \times 4^q$  تابع چارچوب ممکن وجود دارد. بنابراین، تعداد کل توابع چارچوب برحسب  $q_{max}$  توسط  $4^{q_{max}+1}$  به صورت زیر مقیاس‌بندی می‌شود:

$$m(q_{max}) = \sum_{q=0}^{q_{max}} [10 \times 4^q + 2] = \frac{1}{3}(4^{q_{max}+1} - 1) + 2q_{max}, \quad (15)$$

که در آن از رابطه ریاضی جمع یک سری هندسی استفاده شده است. بدون محدودیت محاسباتی و انتخاب دقیق منظم‌سازی، می‌توان از تمام توابع چارچوب موجود برای هر شبکه استفاده کرد. با این حال، برای اهداف محاسباتی و عملی، مطلوب است که از مجموعه‌ای با توابع چارچوب کاهش یافته استفاده شود. الگوریتم به کار گرفته شده در این تحقیق ابتدا توابع چارچوبی که کمتر از سه ایستگاه در ردپای خود دارند (تا حدی به صورت دلخواه) و به عنوان

۲-۳. مسئله معکوس، شامل عدم قطعیت‌ها و منظم‌سازی بردار مدل،  $m$  با کمینه‌سازی تابع کمترین مربعات منظم‌سازی شده برآورد می‌شود:

$$F(m) = \frac{1}{2}(Gm - d)^T C_D^{-1}(Gm - D) + \frac{1}{2}\lambda^2 m^T S m. \quad (10)$$

فرض می‌شود که مشاهدات آلوده به نویز گاوسی با میانگین صفر و ماتریس کوواریانس داده  $C_D$  باشند. هر المان قطری ماتریس کوواریانس داده‌ها واریانس متناظر با هر مشاهده است. بنابراین، اولین ترم در رابطه (۱۰) عدم‌برازش داده‌ها و ترم دوم، منظم‌سازی مدل با پارامتر منظم‌سازی  $\lambda$  است.

انتخاب‌های معمول منظم‌سازی برای زمانی که مدل  $m$  یک کمیت مکانی را نشان می‌دهد شامل نرم مدل، نرم گرادیان مدل یا لاپلاسیان مدل است. در این تحقیق، منظم‌سازی بر اساس نرم گرادیان مدل برآورد می‌شود. در نهایت ماتریس منظم‌سازی  $S \in R^{M \times M}$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \|\nabla f(\theta, \phi)\|_2^2 &= \int_{S^2} \nabla f(\theta, \phi)^T \nabla f(\theta, \phi) d\Omega \\ &= \int_{S^2} \nabla \left[ \sum_{k=1}^M m_k g_k(\theta, \phi) \right]^T \nabla \left[ \sum_{k=1}^M m_k g_k(\theta, \phi) \right] d\Omega \\ &= \sum_{k=1}^M m_k \sum_{k'=1}^M m_{k'} \int_{S^2} \nabla g_k(\theta, \phi)^T \nabla g_{k'}(\theta, \phi) d\Omega \\ &= \sum_{k=1}^M m_k \sum_{k'=1}^M m_{k'} S_{kk'} = m^T S m, \end{aligned} \quad (11)$$

که در آن

$$S_{kk'} = \int_{S^2} \nabla g_k(\theta, \phi)^T \nabla g_{k'}(\theta, \phi) d\Omega \quad (12)$$

پارامتر  $\lambda$  تعامل مابین برازش داده‌ها و همواری جواب را کنترل می‌کند. اثر کمینه‌سازی ترم منظم‌سازی، هدایت انرژی به ضرایب موجکی با مقیاس طولانی‌تر است، زیرا مقیاس موجک کوچک‌تر دارای نرم گرادیان بزرگ‌تر و در نتیجه یک المان ماتریس متناظر بزرگ‌تر  $S_{kk'}$  است. منظم‌سازی همچنین به رفع فقدان متعامد بودن موجک‌های کروی در داخل و مابین مقیاس‌ها کمک می‌کند. لازم به توضیح است که موجک‌های کروی پایه



آستانه مشخص شده توسط کاربر، برای محاسبه مناطق حذفی از میدان‌های برآورد شده استفاده می‌شود. استفاده از این ماسک به این معنی است که تمام نواحی میدان‌های اسکالر که نشان داده شده‌اند به حداقل مقیاس مشخص شده تفکیک می‌شوند. استفاده و انتخاب یک آستانه باینری خاص مسلماً موردی است. تحلیل‌های آینده رویکردهای متفاوتی را برای استفاده کمی کاربرد کمیت‌های به دست آمده به عنوان تابعی از مقیاس و موقعیت در نظر خواهند گرفت.

## ۲-۵. نمایش و تفسیر نتایج چندمقیاسی

نمایش چندمقیاسی انعطاف‌پذیری زیادی در آنالیز داده‌های موقعیت نقطه‌ای فراهم می‌کند. در رویکرد این تحقیق، حداکثر تفکیک‌پذیری (یا به طور معادل، کوچک‌ترین مقیاس پذیرفته شده) میدان به دست آمده به تراکم محلی مشاهدات بستگی دارد. می‌توان میدان سرعت را فقط در مقیاس‌هایی ارزیابی کرد که همه جا مجاز هستند، به عبارت دیگر، حداکثر مقدار کوچک‌ترین مقیاس توسط پیکربندی شبکه معلوم تعیین می‌شود. این انتخاب به طور غیرضروری جزئیات میدان حاصل را محدود می‌کند. یک رویکرد جایگزین، ساختن میدان سرعتی است که در آن مقیاس اطلاعات نشان داده شده توسط میدان به عنوان یک موقعیت تابع در یک شبکه ناهمگن مکانی داده شده از مشاهدات متفاوت است. این رویکرد می‌تواند برای تولید نقشه‌های میدان سرعت که از نظر مکانی پیوسته هستند مفید باشد، اما دارای این عیب است که مقایسه مقادیر به دست آمده (مانند نرخ کرنش) در مقیاس‌های مختلف را ترغیب کرده و در نتیجه به فرد اجازه می‌دهد تا به طور کاذب تنوع مکانی را در جایی که وجود ندارد استنباط کند. در این تحقیق، نقشه تولید نمی‌شود، ولی بر دیدگاهی تأکید می‌شود که مقیاس‌های تغییرشکل را به طور جداگانه در نظر می‌گیرد، یا حداکثر، تمام مقیاس‌های قابل حل را جمع می‌کند، و از طریق پوشش‌های مکانی مبتنی بر خطا، فقط امکان مقایسه مناطقی را فراهم می‌کند که در تفکیک‌پذیری مکانی

ناحیه داخل اولین عبور صفر موجک کروی تعریف شده است را حذف می‌کند. در نتیجه این روش محدوده مقادیر مجاز  $q$  را بر اساس تراکم محلی ایستگاه‌ها تعیین می‌کند. تراکم ایستگاه‌ها امکان انتخاب  $q_{max} = 8$  را امکان‌پذیر می‌سازد. همچنین می‌توان  $q_{max}$  را طوری انتخاب کرد که کمتر از حد مجاز تراکم ایستگاه‌ها باشد. این انتخاب مسئله برآورد را پایدارتر کرده و امکان بیش‌برازش مشاهدات را کاهش می‌دهد. همچنین  $q_{min}$  بر اساس مقیاس طول بیرونی تقریبی شبکه،  $L$ ، محدود می‌شود.  $q_{min}$  طوری انتخاب می‌شود که محمل موجک‌های  $q_{min}$  کمتر از  $2L$  باشد. این محدودیت لازم نیست، زیرا منظم‌سازی مناسب باید توان کمی را در موجک‌هایی که خیلی بزرگ‌تر از شبکه هستند باقی بگذارد.

در ادامه به بررسی ویژگی‌های طولانی‌ترین مقیاس در یک میدان سرعت معین پرداخته می‌شود که با در نظر گرفتن یک کره یکنواخت در حال دوران شروع می‌شود. به صورت محلی، میدان سرعت به عنوان یک انتقال ساده ظاهر می‌شود، که روی کره، متناظر با یک میدان دورانی یکنواخت است. یک میدان دورانی روی کره با بردار اوپلر سه پارامتری توصیف می‌شود. در رویکرد مورد استفاده در این تحقیق، به طور اختیاری بردار اوپلر که بهترین برازش را با میدان سرعت اصلی دارد برآورد می‌شود، میدان دورانی مرتبط با آن حذف شده و برآورد با میدان باقی‌مانده انجام می‌شود. به دست آوردن کران‌های عدم قطعیت دقیق برای سه پارامتر بردار اوپلر (عرض جغرافیایی، طول جغرافیایی و نرخ دوران) چالش‌برانگیز است؛ با این حال، عمدتاً توجه به استفاده از میدان دورانی به عنوان ابزاری برای حذف بزرگ‌مقیاس‌ترین ویژگی‌های میدان سرعت به جای تکیه بر چند موجک کروی بزرگ مقیاس برای توضیح چنین حرکاتی است. توجه به این نکته مهم است که حذف میدان دورانی یکنواخت تأثیری در برآورد نرخ کرنش ندارد. در نهایت، مناطقی از میدان‌های برآورد شده بر اساس ترم‌های قطری کوواریانس پسین داده‌ها (رابطه ۱۴) حذف می‌شوند. از تغییرات مکانی  $D_{ij}$ ، همراه با مقدار

معین قابل مقایسه هستند.

در آینده، می توان برآوردهای مقادیر مشابه نرخ کرنش را با مقادیر مدل های فیزیکی مقایسه کرد (مید و هاگر، ۲۰۰۵). با توجه به این که برآوردها اساساً نسخه های فیلتر شده یک میدان واقعی هستند، چنین مقایسه هایی باید با پیش بینی مدل سرعت های ارزیابی شده در همان نقاطی که داده های مشاهده شده ارزیابی می شوند و سپس برآورد کمیت های به دست آمده با استفاده از رویکرد مشابه (شامل مقدار مشابه منظم سازی) که هنگام بررسی داده های مشاهداتی استفاده شده انجام شود (سیمونز و همکاران، ۱۹۹۷).

### ۳. نقشه نرخ کرنش و دیگر کمیت های اسکالر

در عمل یک مبنا یا سیستم مختصات (به عنوان مثال  $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ ) برای توصیف بردار و تانسور انتخاب می شود. با انتخاب مبنا می توان مؤلفه های بردار  $(v_r, v_\theta, v_\phi)$  یا تانسور را مورد بحث قرار داد. نرم یک بردار یا تانسور به انتخاب پایه بستگی ندارد اما به انتخاب چارچوب مرجع بستگی دارد. نرم گرادیان میدان سرعت به انتخاب پایه یا چارچوب مرجع بستگی ندارد. در این بخش، انواع کمیت های اسکالر قابل استخراج از کمیت های تانسوری بررسی می شوند. نقشه این مقادیر اسکالر مناطقی از تغییر شکل را نشان می دهند که تشخیص آن از بررسی بصری میدان سرعت برآوردی مشکل است. استفاده از کمیت های اسکالر ترجیح داده می شود چون تحت تبدیلات مختصات ناورد هستند. از آنجایی که مقادیر ویژه به انتخاب سیستم مختصات بستگی ندارند، هر تابع اسکالر برحسب مقادیر ویژه نیز یک کمیت ناورد است.

### ۳-۱. تانسور گرادیان سرعت

با محاسبه میدان سرعت برآورد شده،  $v(\theta, \phi)$ ، می توان مشتقات سطحی و دیگر کمیت های تانسوری و اسکالر را محاسبه کرد. گرادیان مکانی سرعت،  $L$ ، به صورت زیر تعریف می شود:

$$L = D + W \quad \text{که می تواند به صورت } L = (\nabla v)^T = v \nabla$$

تجزیه شود که  $D$  متقارن و  $W$  نامتقارن است. برای میدان سرعت سه بعدی، این عبارات به صورت زیر هستند:

$$D = \frac{1}{2}(L + L^T) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{2r}(-v_\theta + \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial v_\theta}{\partial r}) & \frac{1}{2r}(-v_\phi + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial v_\phi}{\partial r}) \\ D_{12} & \frac{1}{r}(v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}) & \frac{1}{2r}(-v_\phi \cot \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}) \\ D_{13} & D_{23} & \frac{1}{r}(v_r + v_\theta \cot \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}) \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$W = \frac{1}{2}(L - L^T) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2r}(-v_\theta + \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - r \frac{\partial v_\theta}{\partial r}) & \frac{1}{2r}(-v_\phi + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - r \frac{\partial v_\phi}{\partial r}) \\ -W_{12} & 0 & \frac{1}{2r}(-v_\phi \cot \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}) \\ -W_{13} & -W_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

از نظر فیزیکی  $D$  تانسور نرخ کرنش و  $W$  تانسور نرخ دوران است، اگرچه معمولاً این اصطلاح برای شرایط تغییر شکل های کوچک محفوظ است که در آن  $D_{ij} \ll 1$  و  $W_{ij} \ll 1$  است (مالورن، ۱۹۶۹).

۳-۱-۱. ساده سازی های عملی برای رئولوژی های ساده با مشاهدات فقط در روی سطح، نمی توان به مشتقات قائم میدان سرعت یعنی  $\partial v_r / \partial r$ ،  $\partial v_r / \partial \theta$ ، و  $\partial v_r / \partial \phi$  دسترسی داشت. علاوه بر این، در بسیاری از سناریوها مؤلفه قائم میدان سرعت  $(v_r)$  و مشتقات مسطحاتی آن  $(\partial v_r / \partial \theta, \partial v_r / \partial \phi)$  در دسترس نیستند.

با این حال، این محدودیت های مشاهده ای به معنای کاهش یافتن  $L$ ،  $D$  و  $W$  به تانسور  $2 \times 2$  نیست، حتی اگر فرض شود که کمیت های از دست رفته برابر با صفر هستند، زیرا  $D_{r\theta}$  حاوی  $v_\theta$  و  $D_{r\phi}$  حاوی  $v_\phi$  است.

برای حذف برخی ترم های مجهول، می توان از این واقعیت استفاده کرد که مشاهدات در سطح آزاد (یعنی کشش صفر) همراه با فرضیات ساده در مورد رفتار رئولوژیکی که در مقیاس زمانی مشاهدات غالب است، انجام می شوند. نخست با صرف نظر کردن از بیضوی بودن و توپوگرافی، زمین به صورت کروی فرض می شود، یعنی هرگونه انحراف سطح آزاد از  $r = R$  نادیده گرفته می شود. در نهایت شرط سطح آزاد به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\sigma \hat{r} = 0, \quad (18)$$

۲-۳. کمیت‌های اسکالر به دست آمده از تانسورها در محاسبات، سه کمیت ناوردای مرتبط با نرخ اتساع  $(\Theta)$ ، نرخ کرنش  $(\Sigma)$  و نرخ دوران  $(\Omega)$  در نظر گرفته می‌شوند. به شکل تابعی، این کمیت‌ها به صورت  $\Theta(\theta, \phi)$ ،  $\Sigma(\theta, \phi)$  و  $\Omega(\theta, \phi)$  نوشته می‌شوند، چون مشاهدات محدود به سطح کره هستند.

۱-۲-۳. نرخ اتساع

نرخ اتساع یا نرخ کرنش حجمی، دیورژانس میدان سرعت، یا به طور معادل، اولین ناوردای تانسور گرادیان سرعت است.

$$\Theta = \nabla \cdot v = \text{Tr}(L) = \text{Tr}(D)$$

$$= r^{-1} \left[ 2v_r + v_\theta \cot\theta + r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right], \quad (24)$$

که مطابق مالورن (۱۹۶۹) است. نرخ اتساع بعد از اعمال شرط سطح آزاد از معادله (۲۰) به دست می‌آید:

$$\Theta_0^{elastic} = \frac{1}{R} (F + 1) \left( 2v_r + v_\theta \cot\theta + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right), \quad (25)$$

۲-۲-۳. نرخ کرنش

کمیت نرخ کرنش  $\Sigma$ ، به صورت نرم فروبنیوس (Frobenius) تانسور نرخ کرنش  $D$  تعریف می‌شود. از نظر ریاضی،  $\Sigma$ ، را می‌توان به صورت زیر بیان کرد (تیب و همکاران، ۲۰۰۹).

$$\Sigma = \|D\|_F = \sqrt{D:D} = \sqrt{\text{tr}(DD)}, \quad (26)$$

که توسط باس و همکاران (۲۰۰۳) استفاده شده است. در ادامه این مقاله، نرم فروبنیوس تانسور نرخ کرنش به اختصار نرخ کرنش نامیده می‌شود.

۳-۲-۳. نرخ دوران

بردار دوران،  $w = \frac{1}{2} \nabla \times v$ ، از مؤلفه‌های تانسور نرخ

که  $\sigma$  تانسور تنش متقارن مرتبه دو است، و  $\hat{r} = (1, 0, 0)$  نرمال واحد رو به بالا در مختصات محلی  $r - \theta - \phi$  است. معادله (۱۸) قيود زیر را فراهم می‌کند:

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{21} = \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{31} = \sigma_{13} = 0 \quad (19)$$

برای هر دو رئولوژی گرانروی همسانگرد ساده و همسانگرد کشسان،  $D_{31} = D_{13} = 0$  و  $D_{21} = D_{12} = 0$  است. اگر رئولوژی کشسان خطی فرض شود، در این صورت برای مشاهدات سطحی، معادلات (۱۶) و (۱۷) به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$D_0^{elastic} = \begin{bmatrix} F(D_{22} + D_{33}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \left( v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{2R} \left( -v_\phi \cot\theta + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \right) \\ 0 & D_{23} & \frac{1}{R} \left( v_r + v_\theta \cot\theta + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$W_0^{elastic} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R} \left( -v_\theta + \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{R} \left( -v_\phi + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right) \\ -W_{12} & 0 & \frac{1}{2R} \left( -v_\phi \cot\theta + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \right) \\ -W_{13} & -W_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

که در آن

$$F = -\lambda / (\lambda + 2\mu) \quad (22)$$

ثابت بوده، و  $\lambda$  و  $\mu$  پارامترهای لامه هستند. برای جامد پواسون،  $\lambda = \mu$  و  $F = -1/3$  است.

حال یک رئولوژی گرانروی خطی به شکل زیر فرض می‌شود (مالورن، ۱۹۶۹):

$$\sigma = \text{Tr}(\sigma)I + \Lambda \text{Tr}(D)I + 2\eta D \quad (23)$$

که در آن  $\eta$  و  $\Lambda$  گرانروی را مشخص می‌کنند. با فرض تراکم‌ناپذیری،  $\nabla \cdot v = \text{Tr}(L) = \text{Tr}(D) = 0$ ، قید  $D_{11} = -(D_{22} + D_{33})$  به دست می‌آید که در مقایسه با معادله (۲۰)، متناظر با  $F = -1$  است.

با اعمال قيود سطح آزاد در معادله (۱۹)، قيود اضافی  $D_{12} = D_{13} = 0$  به دست می‌آید، و جبر با  $F = -1$  از حالت الاستیک پیروی می‌کند.

سرعت با شبیه‌سازی جابه‌جایی‌های ناشی از یک گسل امتدادلغز نشان داده می‌شود. سپس میدان سرعت GPS در محدوده برخورد مایل صفحات زمین‌ساختی عربستان-اوراسیا با استفاده از این رویکرد مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد.

#### ۴-۱. برآورد چندمقیاسی میدان سرعت امتدادلغز

##### بین‌لرزه‌ای شبیه‌سازی شده

در این بخش مثالی به صورت شبیه‌سازی ارائه می‌شود که قابلیت تخمین چندمقیاسی را نشان می‌دهد. برای محاسبات گرادیان سرعت، از شرط سطح آزاد استفاده شده و رئولوژی پسته به صورت کشسان خطی فرض شده است. مقیاس‌های استفاده شده برای شبیه‌سازی در جدول ۱ ارائه شده است. مطابق این جدول مقادیر کوچک‌تر  $q$  به مقیاس‌های طولی بلندتر، و مقادیر بزرگ‌تر  $q$  به مقیاس‌های طولی کوتاه‌تر اشاره می‌کنند.

موجک‌های کروی به صورت خودکار بر اساس تراکم ایستگاه‌های GPS انتخاب می‌شوند. در برآورد ضرایب برای هر موجک، یک پارامتر منظم‌سازی با استفاده از اعتبارسنجی متقابل معمولی به دست می‌آید.

نخست یک میدان سرعت در سطح زمین ناشی از یک گسل امتدادلغز با عمق قفل‌شدگی در نظر گرفته می‌شود. دو پارامتر برای تعیین مدل مورد نیاز است: عمق قفل‌شدگی و نرخ لغزش. میدان بین‌لرزه‌ای به صورت یک گسل دایره-عظیمه (great-circle) تقریب زده می‌شود، یعنی گسلی که روی کل کره تعریف شده است. ابتدا با معلوم بودن طول و عرض جغرافیایی دو نقطه روی گسل، قطب اوپلر گسل محاسبه می‌شود. سپس میدان سرعت برای یک نیمکره چرخان که نقاط آن با نصف نرخ لغزش گسل حرکت می‌کنند، محاسبه می‌شود. برای نیمکره دیگر، میدان سرعت برای نیمکره چرخان در جهت مخالف با نصف نرخ لغزش محاسبه می‌شود. دو نیمکره چرخان در جهت عکس هم میدان سرعت گسل بدون

دوران،  $W$ ، به صورت زیر تعیین می‌شود (مالورن، ۱۹۶۹).

$$w = -W_{\theta\phi}\hat{r} + W_{r\phi}\hat{\theta} - W_{r\theta}\hat{\phi} \quad (27)$$

با جایگزینی ترم‌ها در معادله (۲۱)، رابطه زیر به دست می‌آید.

$$w = \frac{1}{2R} \left( v_{\phi} \cot\theta - \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \phi} + \frac{\partial v_{\phi}}{\partial \theta} \right) \hat{r} + \frac{1}{R} \left( -v_{\phi} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{R} \left( v_{\theta} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi}, \quad (28)$$

که بردار دوران مربوط به نقطه  $(R, \theta, \phi)$  در سطح کره می‌باشد. بزرگی دوران به صورت زیر است:

$$\Omega \equiv |w| = (W_{\theta\phi}^2 + W_{\phi r}^2 + W_{r\theta}^2)^{1/2} \quad (29)$$

واحد  $\Omega$  بایستی رادیان بر واحد زمان باشد. این کمیت تحت تبدیلات مختصات ناورد است و به صورت زیر نیز می‌تواند بیان شود:

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \|W\|_F = \sqrt{-\frac{1}{2} \text{Tr}(WW)} = \sqrt{\frac{1}{2} W:W}. \quad (30)$$

محل قطب دوران طول و عرض جغرافیایی است که بردار واحد  $W/|W|$  کره را قطع می‌کند. برای تفسیرهای فیزیکی، بردار دوران (معادله ۲۸) به دو بردار،

$w = w_s + w_t$ ، تفکیک می‌شود که

$$w_s = \frac{1}{2R} \left( v_{\phi} \cot\theta - \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \phi} + \frac{\partial v_{\phi}}{\partial \theta} \right) \hat{r} - \frac{v_{\phi}}{R} \hat{\theta} + \frac{v_{\theta}}{R} \hat{\phi}, \quad (31)$$

$$w_t = \frac{1}{R} \left( \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi}, \quad (32)$$

اندیس پایین  $s$  برای نشان دادن کره استفاده شده است، به این صورت که تمام ترم‌های سرعت مماس بر سطح کره هستند  $(v_{\theta}, v_{\phi})$ ؛ اندیس پایین  $t$  نیز برای نشان دادن شیب به کار رفته است، که در آن تمام ترم‌ها مربوط به حرکت شیب مانند محلی هستند.

#### ۴. محاسبات

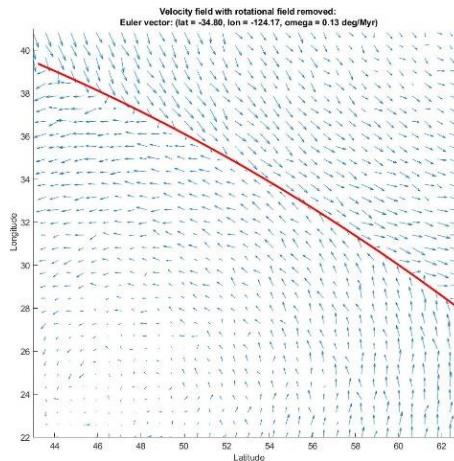
نخست قابلیت رویکرد چندمقیاسی برای مدل‌سازی میدان

امتداد لغز در مقیاس های  $q = 3 \sim 8$ ،  $q = 3 \sim 5$ ،  $q = 6$  و  $q = 7$  نشان می دهد. میدان نرخ کرنش (شکل ۴-الف) الگوی بین لرزه ای مورد انتظار را برای گسل امتداد لغز قفل شده نشان می دهد. بیشینه نرخ کرنش در امتداد گسل و در حدود  $4/8 \times 10^{-8}$  در سال بوده و نسبت به گسل متقارن است. همان طور که انتظار می رود نرخ اتساع بر آورد شده برای این شبیه سازی تقریباً برابر صفر است (شکل ۴-ب). دلیل نوسانات حول صفر نرخ اتساع ناشی از ترکیب (۱) خطای با توزیع نرمال استاندارد اضافه شده به داده های شبیه سازی و (۲) خطاهای محاسباتی بر آورد است. مقایسه اشکال ۴-الف و ۴-ب نشان می دهد که تغییرات کاذب نرخ اتساع کمتر از نرخ کرنش است. مطابق شکل ۴-ج بیشینه نرخ دوران برابر  $3/2 \times 10^{-8}$  رادیان در سال است، که نشان دهنده دوران جزئی برای تغییر شکل در مجاورت گسل است.

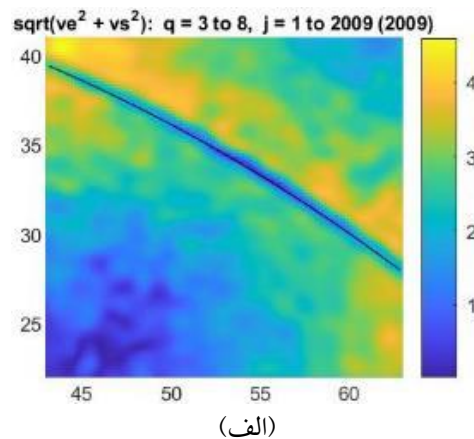
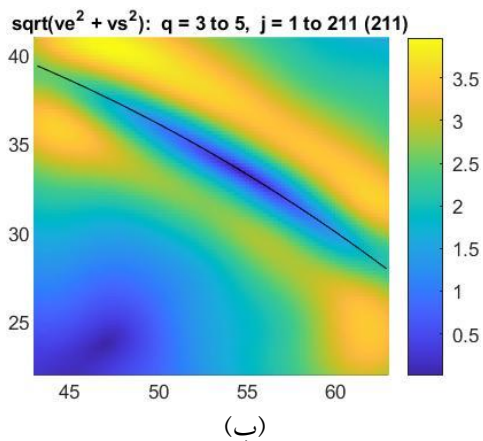
قفل شدگی را تولید می کنند که با عمق قفل شدگی با تابعی به شکل زیر تعدیل می شود (تیپ و همکاران، ۲۰۰۹):

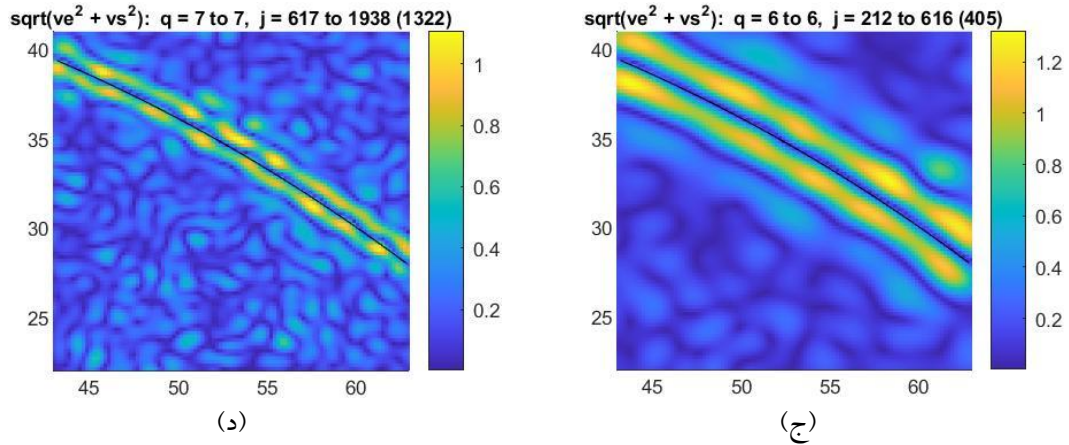
رابطه  $F(\Delta, D) = \frac{2}{\pi} |\tan^{-1}[R(\Delta - \pi)/D]|$  در این رابطه R شعاع زمین و  $\Delta$  فاصله زاویه ای از یک نقطه مشاهداتی تا قطب گسل دایره عظیمه است. میدان های سرعت شبیه سازی شده مؤلفه قائم ندارند و میدان نرخ اتساع مربوطه صفر است.

شکل ۲ میدان سرعت شبیه سازی شده برای گسل امتداد لغز با عمق قفل شدگی ۱۰ کیلومتر و نرخ لغزش ۷ میلی متر در سال را پس از اضافه کردن خطا با توزیع نرمال استاندارد برای میدان سرعت شبیه سازی شده و حذف میدان سرعت دورانی با قطب اوپلر نشان می دهد. شکل ۳ میدان سرعت سطحی پیوسته بر آورد شده از مشاهدات گسسته شبیه سازی شده در سطح آزاد را برای گسل

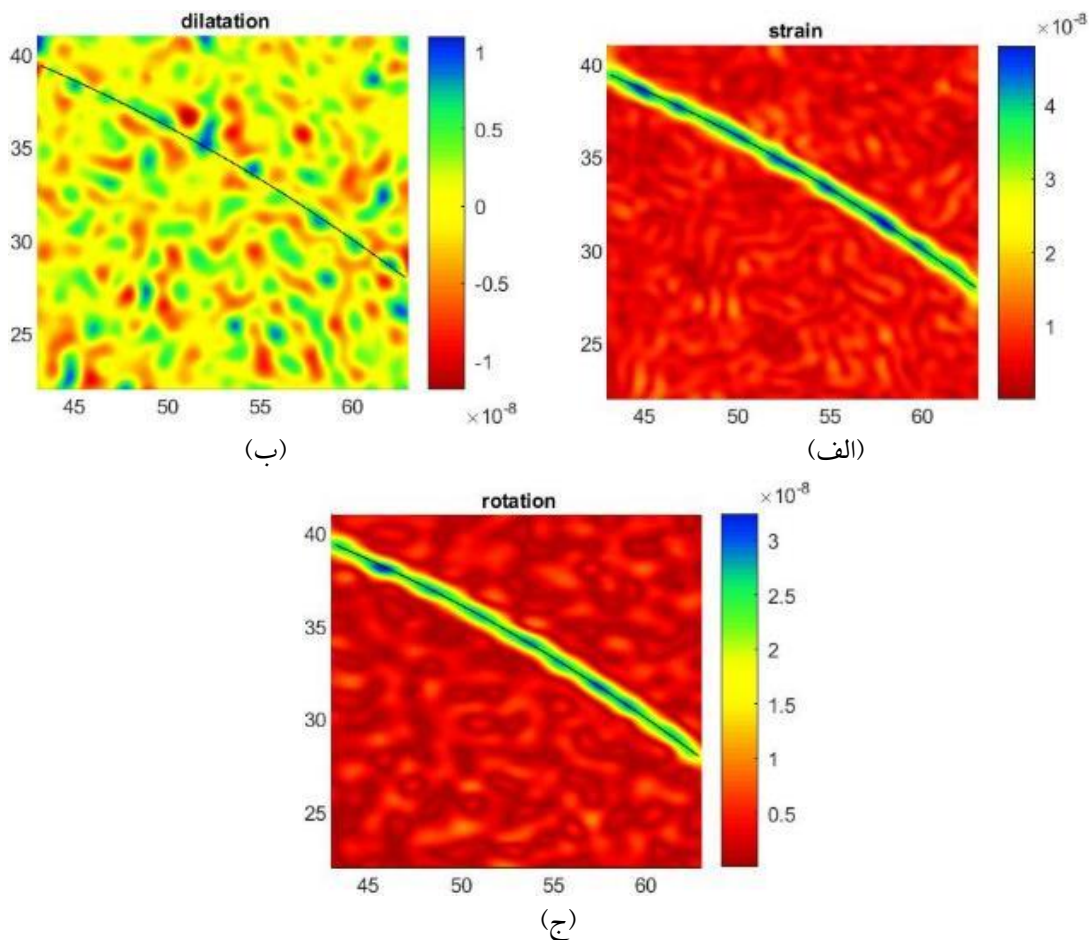


شکل ۲. میدان سرعت شبیه سازی شده برای گسل امتداد لغز که یک میدان سرعت دورانی از آن کم شده است.





شکل ۳. برآورد چندمقیاسه میدان سرعت در سطح آزاد برای گسل امتدادلغز شبیه‌سازی شده به صورت دایره عظیمه با نرخ لغزش ۷ میلی‌متر در سال و عمق قفل‌شدگی ۱۰ کیلومتر با مقیاس‌های (الف)  $q = 3 \sim 8$ ، (ب)  $q = 3 \sim 5$ ، (ج)  $q = 6$  و (د)  $q = 7$



شکل ۴. نمایش قابلیت موجک کروی برای برآورد نرخ کرنش، (ب) اتساع و (ج) دوران ناشی از گسل امتدادلغز شبیه‌سازی شده مطابق شکل ۲.

میدان سرعت GPS یکپارچه برای منطقه برخورد مایل صفحه‌های زمین‌ساختی عربستان-اوراسیا استفاده شد (شکل ۵). این میدان نتیجه ترکیب پردازش داده‌های جمع‌آوری شده در طول ۱۰ سال از ۲۰۰۶ تا ۲۰۱۵ از

۲-۴. برآورد چندمقیاسی میدان سرعت GPS در منطقه برخورد مایل صفحه‌های زمین‌ساختی عربستان-اوراسیا به‌منظور برآورد چندمقیاسی از گسترده‌ترین و به‌روزترین



است. در این اشکال رنگ مربوط به مقیاس  $q$  برای هر تابع پایه است. برخی نقاط با چندین تابع پایه با مقیاس های مختلف  $q$  مطابقت دارند، ولی فقط بالاترین مقیاس  $q$  قابل مشاهده است.

مطابق شکل ۱۰ همان طور که انتظار می رود، هر جا که از توابع چارچوب در مقیاس کوتاه تر در برآورد میدان سرعت استفاده می شود، دامنه بردارهای میدان باقی مانده کاهش می یابند. کوچک ترین باقی مانده ها در نقاط مشاهده ای رخ می دهند که به اندازه کافی متراکم هستند و در محمل توابع چارچوب با مقیاس طولی کوچک تر قرار می گیرند، و همچنین دارای کمترین عدم قطعیت برآورد در داده ها هستند. به طور کلی بزرگ ترین باقی مانده ها با بزرگ ترین عدم قطعیت در داده ها همراه هستند.

از دیدگاه رفتارسنجی یک شبکه GPS، نقشه باقی مانده می تواند برای شناسایی وضعیت نادرست یک ایستگاه مفید باشد. به این صورت که اگر در اطراف ایستگاهی کرنش، اتساع یا دوران غیرمعمول مشاهده شد مشاهدات چنین ایستگاهی مستلزم تجزیه و تحلیل بیشتر سری های زمانی GPS و برآورد خطاها هستند.

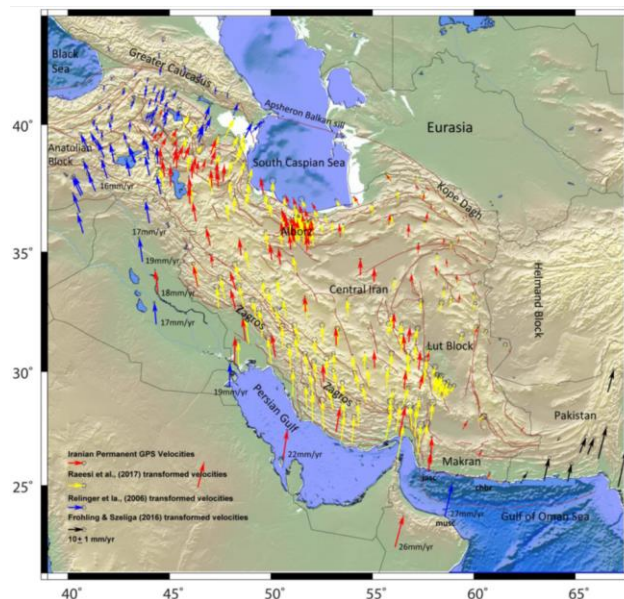
شبکه دائمی GNSS ایران (IPGN) با میدان های سرعت منتشر شده قبلی از مشاهدات GPS طی سال های ۱۹۹۷ تا ۲۰۱۳ است.

نخست با استفاده از مفهوم قطب اولر یک میدان سرعت دورانی از مجموعه داده های نمایش داده شده در شکل ۵ حذف می شود (شکل ۶). سپس میدان سرعت مسطحاتی برآورد می شود، که با استفاده از آن میدان کمیت های اسکالر محاسبه می شوند.

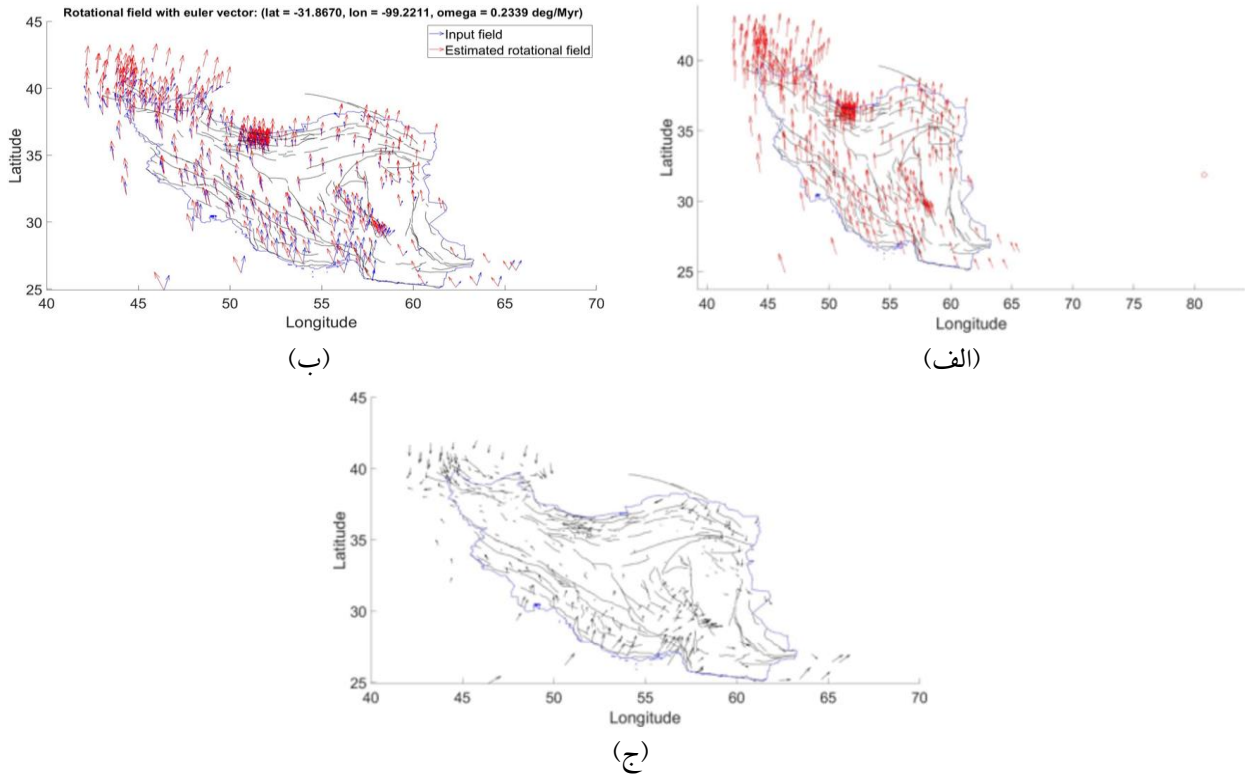
برای محاسبات گرادیان سرعت، از شرط سطح آزاد و رئولوژی کشسان استفاده شده است. مقیاس های استفاده شده در جدول ۱ خلاصه شده است:  $q$  پایین به مقیاس های طول بلند، و  $q$  بالا به مقیاس های طول کوتاه اشاره دارد.

همان طور که قبلاً توضیح داده شد، موجک های کروی به صورت خودکار بر اساس تراکم ایستگاه، و به صورت اختیاری، توسط کاربر انتخاب می شوند. در برآورد ضرایب برای هر موجک، یک پارامتر منظم سازی با استفاده از اعتبارسنجی متقابل به دست می آید (شکل ۹).

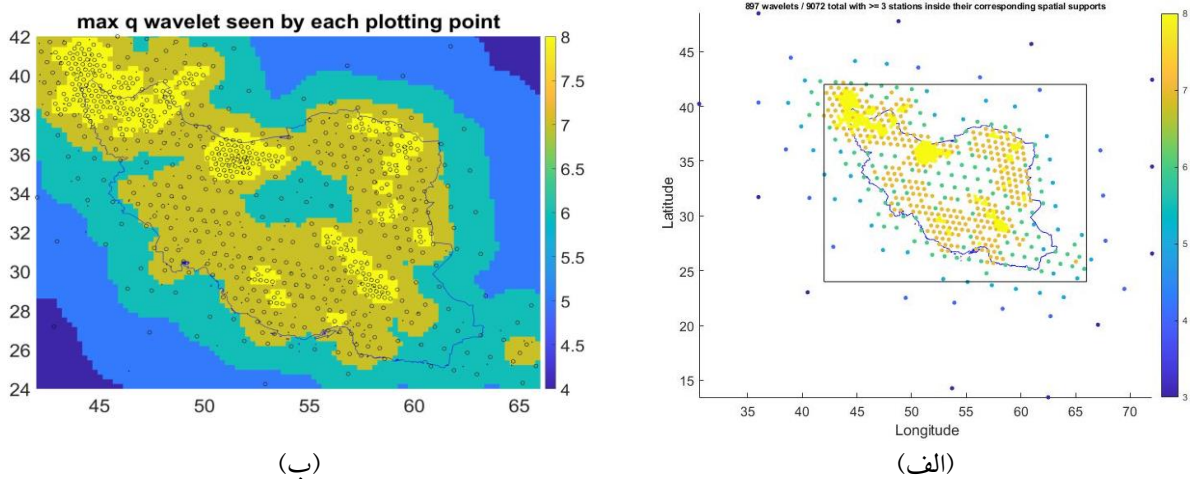
مجموعه کامل نقاط مرکزی برای توابع پایه مورد استفاده در وارون سازی در شکل های ۷ و ۸ نمایش داده شده



شکل ۵. میدان سرعت مسطحاتی GPS یکپارچه نسبت به چارچوب ثابت اوراسیا در منطقه برخورد مایل صفحات زمین ساختی عربستان-اوراسیا (خرمی و همکاران، ۲۰۱۹). میدان های سرعت (رایلینگر و همکاران، ۲۰۰۶ (بردارهای آبی)، فرولینگ و شلايگا، ۲۰۱۶ (بردارهای سیاه) و رئیسی و همکاران، ۲۰۱۷ (بردارهای زرد)) به چارچوب مرجع اوراسیا مربوط به شبکه IPGN تبدیل شده اند (بردارهای قرمز). گسل های اصلی ایران، شرق ترکیه و قفقاز از حسامی و همکاران (۲۰۰۳)، طالبیان و همکاران (۲۰۱۳)، قدس و همکاران (۲۰۱۵) اقتباس شده است.

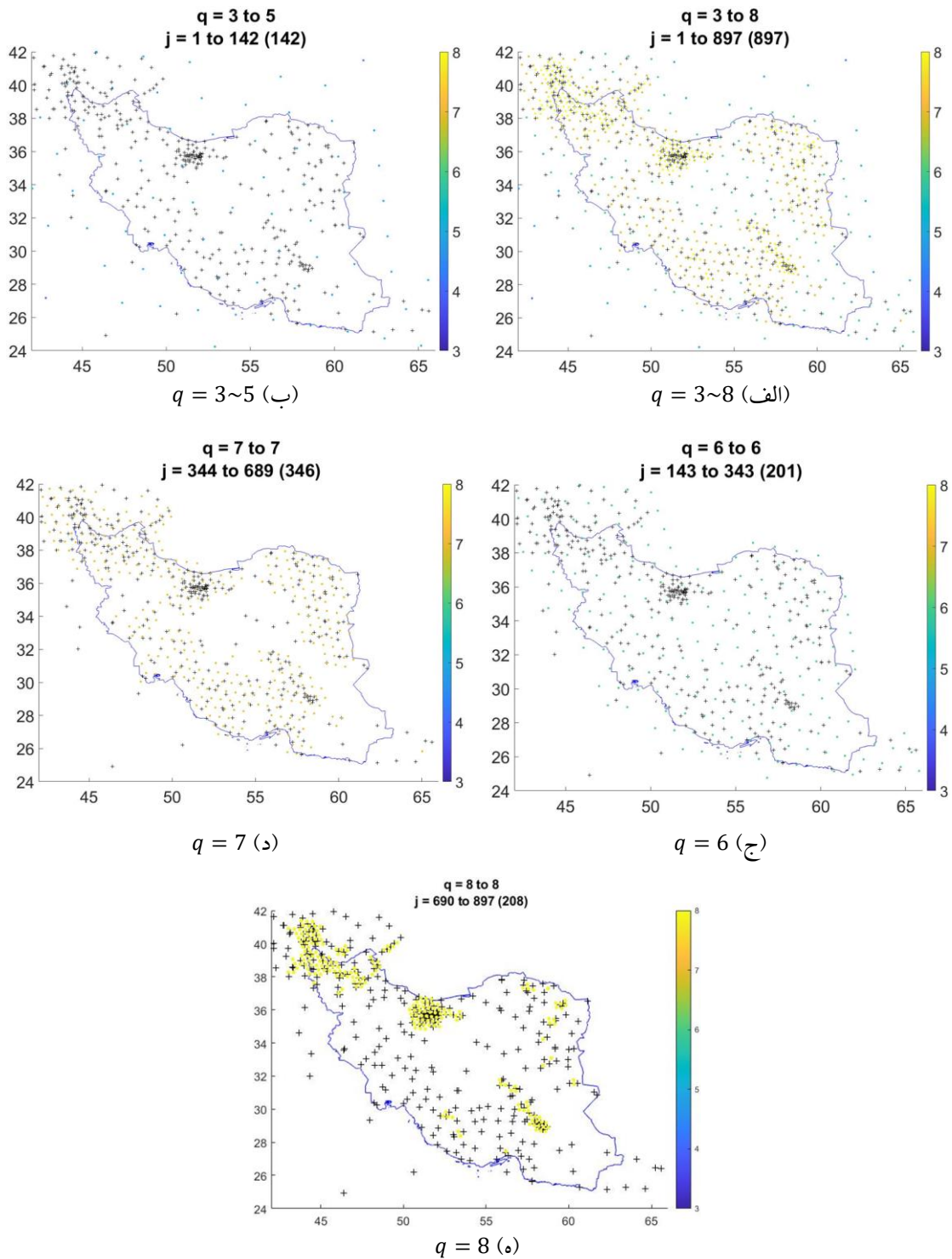


شکل ۶. حذف یک میدان دورانی از میدان سرعت مسطحی IPGN. (الف) میدان سرعت دورانی با بهترین برازش به میدان سرعت مسطحی با قطب اوپلر. (ب) میدان سرعت مسطحی اولیه همراه با میدان سرعت برآورد شده با استفاده از قطب اوپلر (ج) یک میدان دورانی یکنواخت از میدان سرعت اولیه کم شده است. اگرچه این کار در نتایج برآورد تأثیری ندارد (میدان سرعت مسطحی باقی مانده).

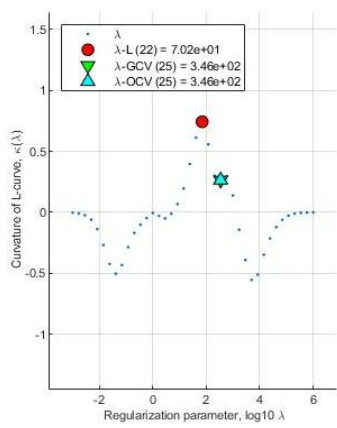


شکل ۷. انتخاب موجک‌های کروی بر اساس ایستگاه‌های مشاهداتی شبکه IPGN. با استفاده از مقیاس‌های  $q = 3 \sim 8$ . تراکم ایستگاه‌های مشاهداتی که به شکل دایره ترسیم شده‌اند، کنترل‌کننده انتخاب موجک‌های کروی است. نقشه رنگی بیشینه مقیاس موجک ( $q$ ) پوشش‌دهنده هر ناحیه را نشان می‌دهد، پوشش با طول مقیاس برای هر موجک کروی تعیین می‌شود (جدول ۱). جاهایی که ایستگاه‌ها متراکم هستند، موجک‌هایی با تمام مقیاس‌های  $q = 3 \sim 8$  (زرد رنگ) در دسترس هستند. هر جا که ایستگاه‌ها پراکنده هستند، فقط موجک‌هایی با مقیاس‌های طول بلند  $q = 3 \sim 5$  (آبی رنگ) قابل دسترسی هستند.

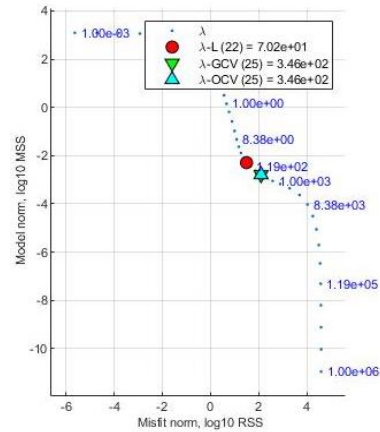




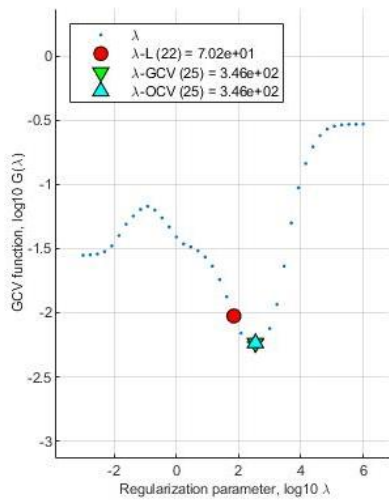
شکل ۸. مراکز نقاط شبکه تابع پایه برای شبکه‌های  $q = 3 \sim 8$ ،  $q = 3 \sim 5$ ،  $q = 6$ ،  $q = 7$  و  $q = 8$  رنگ متناظر با مقیاس  $q$  برای هر تابع پایه است. محل ایستگاه‌های مشاهداتی با علامت "+" نشان داده شده است.



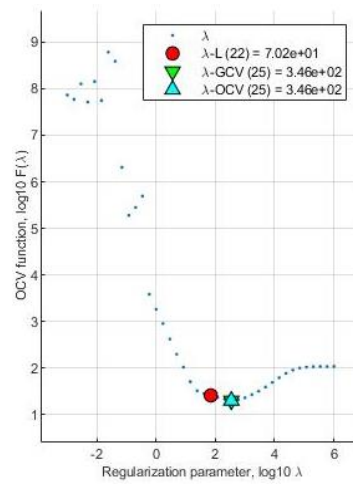
(ب)



(الف)

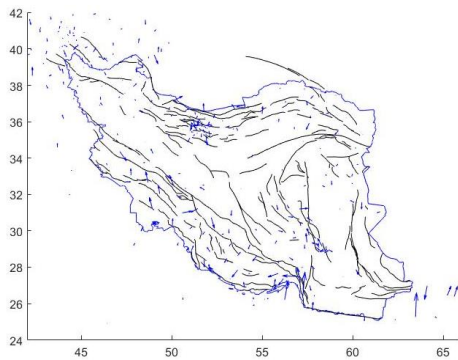


(د)

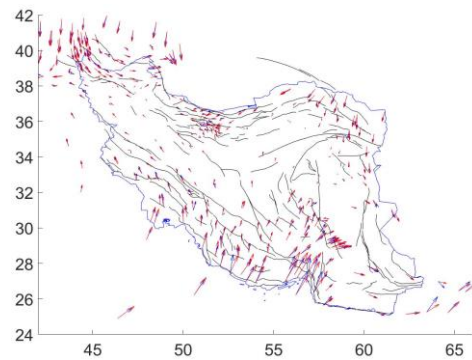


(ج)

شکل ۹. انتخاب پارامتر منظم‌سازی،  $\lambda$ ، با در نظر گرفتن سه رویکرد مختلف: منحنی  $L$ ، اعتبارسنجی متقابل عادی (OCV)، اعتبارسنجی متقابل عمومی (GCV). هر سه رویکرد تقریباً به یک پارامتر منظم‌سازی منجر شده است. حداقل مقدار منحنی (مثلاً توپر) پارامتر منظم‌سازی را نشان می‌دهد.

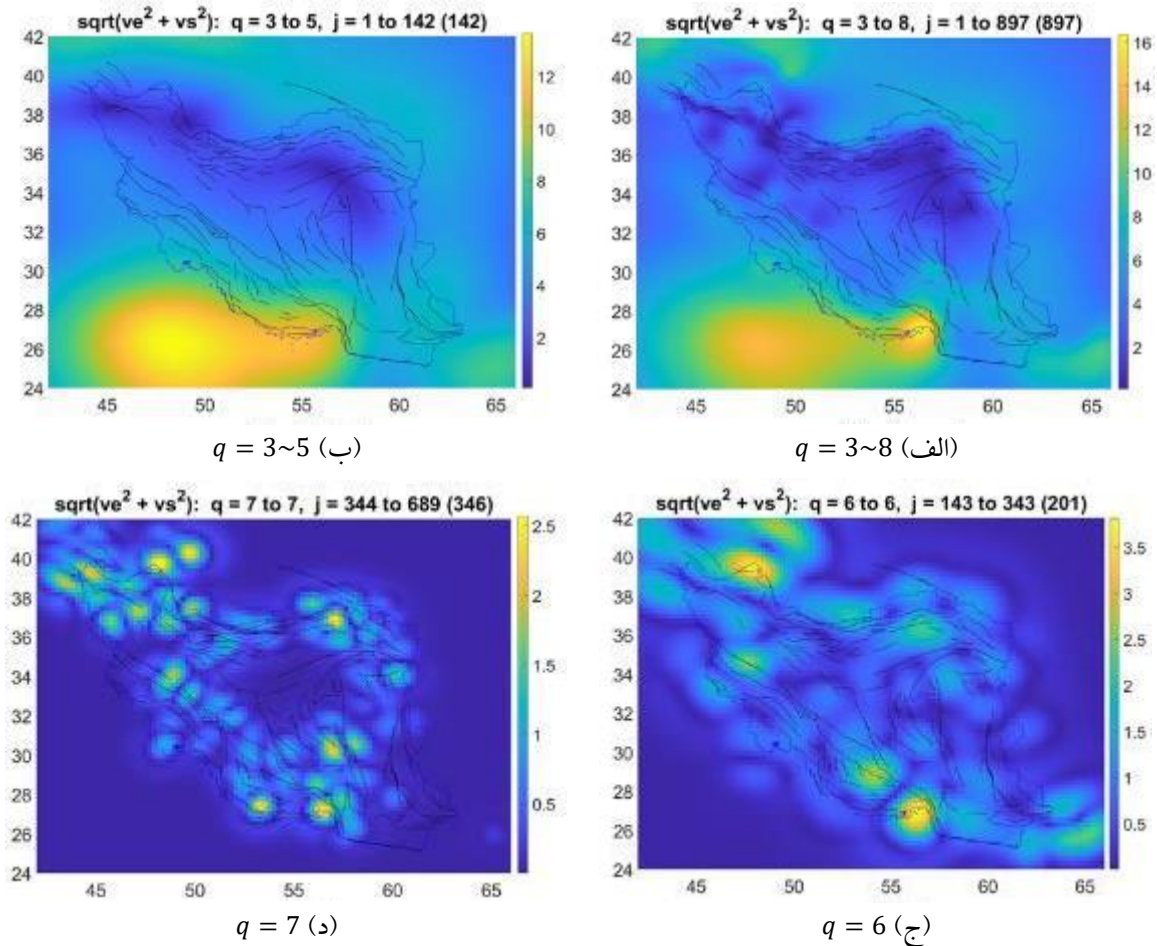


(ب)



(الف)

شکل ۱۰. میدان‌های سرعت مشاهداتی و برآورد شده (الف)، و همچنین میدان باقی‌مانده (ب). دو مؤلفه میدان سرعت برآوردی از وارون‌سازی کمترین مربعات ضرایب توابع پایه موجک کروی به‌دست آمده است.



شکل ۱۱. نمایش میدان سرعت برآوردی برای منطقه برخورد مایل صفحات زمین‌ساختی عربستان-اوراسیا با مقیاس‌های (الف)  $q = 3 \sim 8$ ، (ب)  $q = 3 \sim 5$ ، (ج)  $q = 6$  و (د)  $q = 7$ .

افزایشی. در این تحقیق نتایج با مقیاس افزایشی نمایش داده شدند. نقشه‌های حاصل، گرادینان‌هایی را در میدان سرعت نشان می‌دهند که از خود میدان سرعت به راحتی قابل تشخیص نیستند.

شکل ۱۲-الف نرخ کرنش پیوسته برآورد شده با مقیاس‌های ۳ الی ۸ را نشان می‌دهد. در شکل ۱۲-ب فقط کلیات نرخ کرنش با مقیاس‌های ۳ الی ۵ در داخل ایران قابل تشخیص است. مقایسه اشکال ۱۲-ج و ۱۲-د نشان می‌دهد که کرنش محلی در اطراف اکثر گسل‌های فعال با مقیاس ۷ بهتر از مقیاس ۶ قابل آشکارسازی است.

شکل ۱۳-الف نرخ اتساع پیوسته برآورد شده با مقیاس‌های ۳ الی ۸ را نشان می‌دهد. مناطق انقباضی و انبساطی در داخل ایران قابل مشاهده است. شکل ۱۳-ب با

شکل ۱۱-الف میدان سرعت پیوسته برآورد شده با استفاده از مقیاس ۳ الی ۸ موجک تفاضل گاوسی را نشان می‌دهد. کاهش میدان سرعت برآوردی از جنوب به شمال و از غرب به شرق در محدوده ایران قابل مشاهده است، ولی تغییرات محلی میدان سرعت به راحتی قابل تشخیص نیست. شکل ۱۱-ب با استفاده از مقیاس ۳ الی ۵ مؤلفه دائمی میدان سرعت را در منطقه مورد مطالعه نشان می‌دهد. تغییرات محلی میدان سرعت در مقیاس‌های ۶ و ۷ مطابق اشکال ۱۱-ج و ۱۱-د به راحتی قابل تشخیص و مشاهده است.

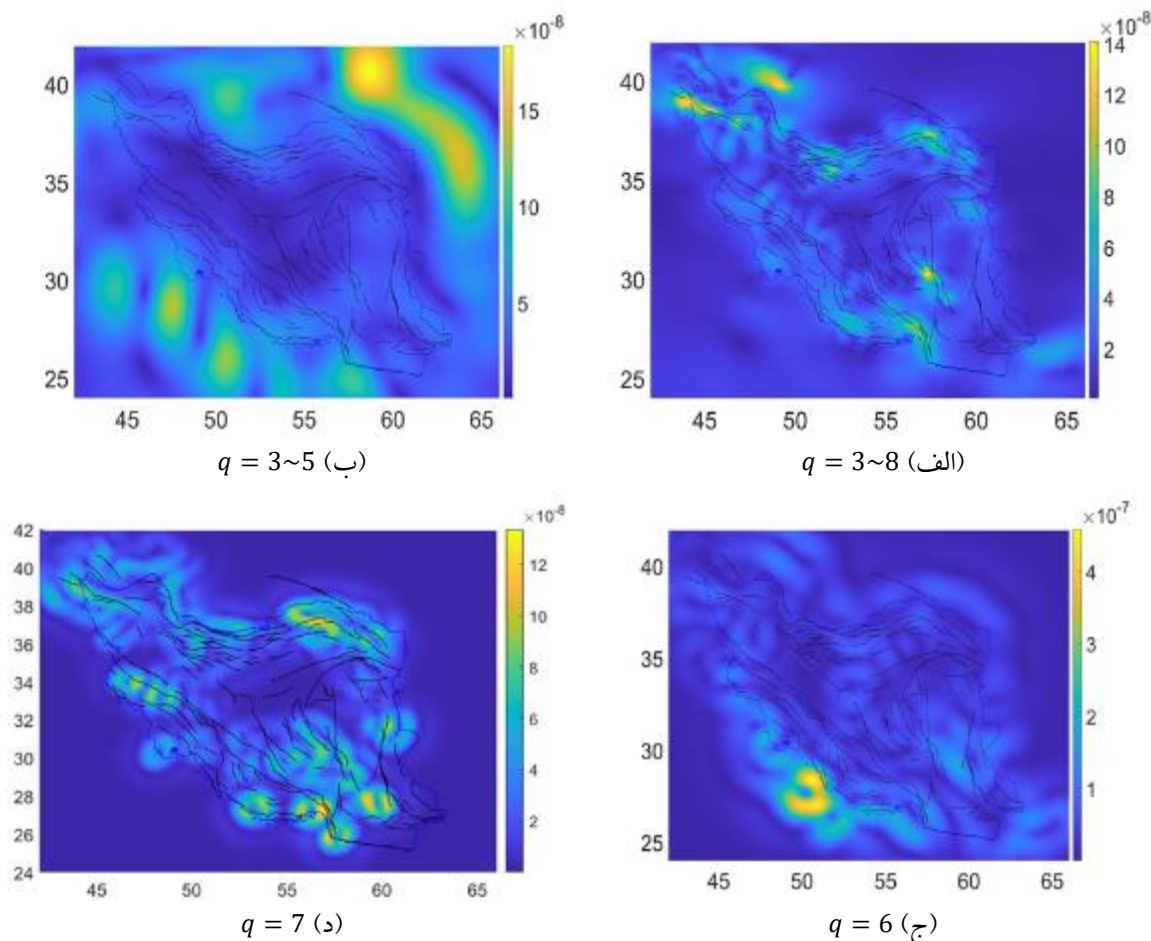
پس از برآورد چندمقیاسی میدان سرعت، می‌توان مقادیر اسکالر دیگری مانند اتساع، کرنش و دوران را به آسانی محاسبه کرد. دو امکان برای نمایش تجزیه چندمقیاسی وجود دارد، یکی با مقیاس تجمعی و دیگری با مقیاس

می‌تواند گرادیان مکانی را در میدان سرعت ثبت کرده و نرخ کرنش و کمیت‌های اسکالر مستخرج از آن را برآورد کند. براین اساس نرخ کرنش با بیشینه  $1/410 \times 10^{-7}$ ، میانگین  $1/786 \times 10^{-8}$  و انحراف معیار  $1/626 \times 10^{-8}$  در سال (شکل ۱۲)، نرخ اتساع با بیشینه  $1/684 \times 10^{-8}$ ، میانگین  $3/487 \times 10^{-9}$  و انحراف معیار  $1/144 \times 10^{-8}$  در سال (شکل ۱۳) و در نهایت نرخ دوران نیز با بیشینه  $7/771 \times 10^{-8}$ ، میانگین  $7/720 \times 10^{-9}$  و انحراف معیار  $7/040 \times 10^{-9}$  در منطقه مورد مطالعه به دست آمده است. با توجه به فاصله کمتر ایستگاه‌های مشاهداتی در بخش جنوبی البرز مرکزی و شمال غرب ایران مقادیر نرخ کرنش، اتساع و دوران در این مناطق و در مقیاس ۷ قابل مشاهده است.

استفاده از مقیاس‌های ۳ الی ۵ کلیات نرخ اتساع را بدون اثرات محلی نشان می‌دهد. اثرات محلی نرخ اتساع در این مقیاس‌ها فیلتر شده است. مقایسه اشکال ۱۳-ج و ۱۳-د نشان می‌دهد که نرخ اتساع محلی با مقیاس ۷ بهتر از مقیاس ۶ قابل تشخیص و بررسی است.

نرخ دوران پیوسته برآورد شده با مقیاس‌های ۳ الی ۸ به صورت ساعتگرد در شکل ۱۴-الف قابل مشاهده است. شکل ۱۴-ب کلیات دوران با اثرات محلی فیلتر شده را با استفاده از مقیاس‌های ۳ الی ۵ نشان می‌دهد. اشکال ۱۴-ج و ۱۴-د نیز نرخ دوران را با جزئیات محلی نشان می‌دهند. مقایسه این دو شکل نشان می‌دهد که بهترین مقیاس برای بررسی محلی دوران مقیاس ۷ است.

تراکم بالای ایستگاه‌های نزدیک به یک سیستم گسلی

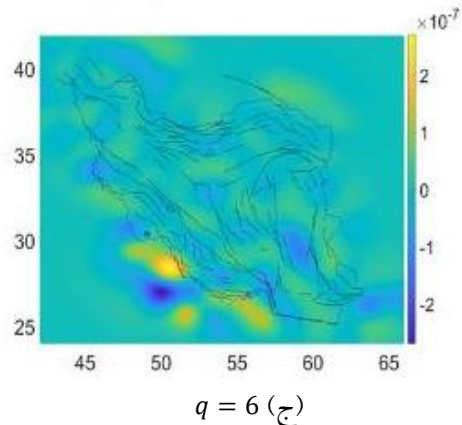
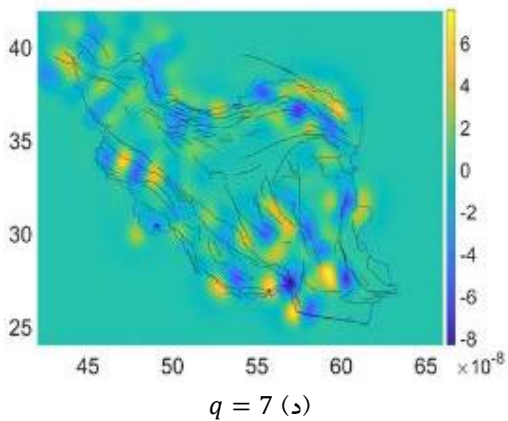
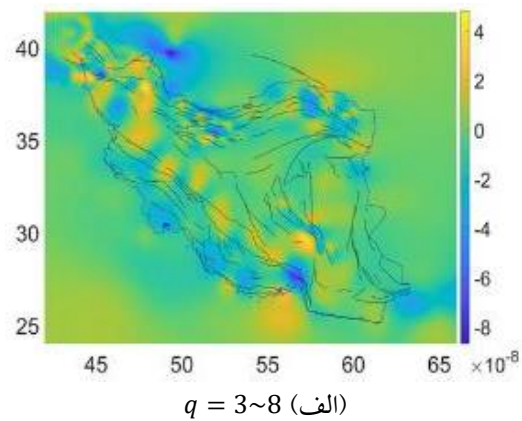
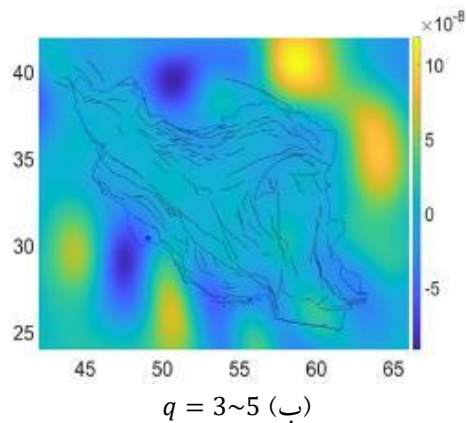


شکل ۱۲. نمایش نرخ کرنش برآوردی برای منطقه برخورد مایل صفحات زمین‌ساختی عربستان-اوراسیا با مقیاس‌های (الف)  $q = 3 \sim 8$ ، (ب)  $q = 3 \sim 5$ ، (ج)  $q = 6$  و (د)  $q = 7$ .

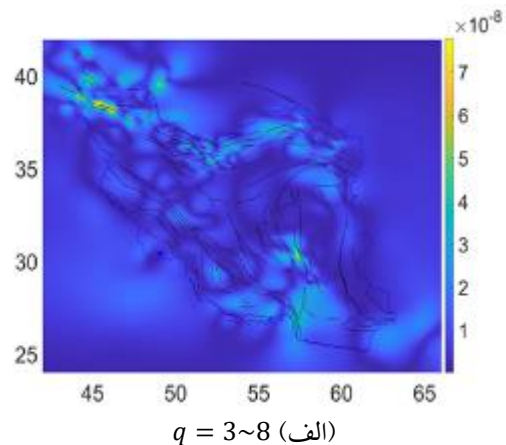
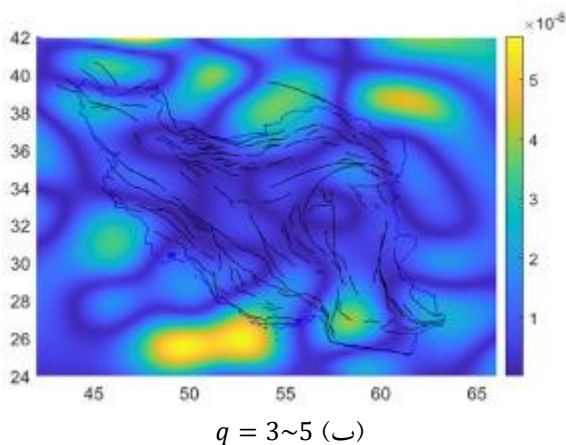


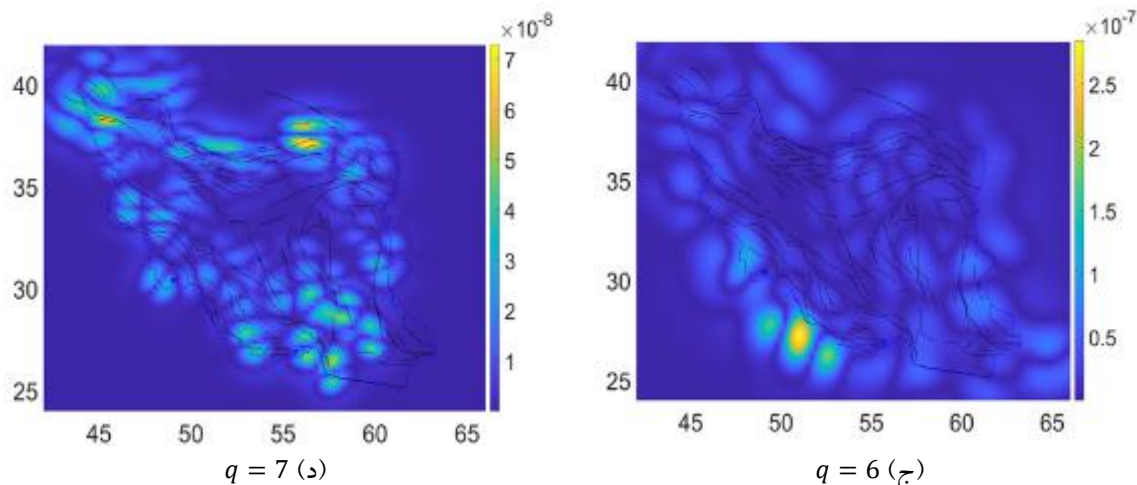
مؤید برخورد مایل دو صفحه زمین‌ساختی عربستان و اوراسیا و توزیع تغییرشکل حاصل در ایران هستند. علاوه بر این ارائه دید چندمقیاسی یکپارچه از میدان سرعت و کمیت‌های اسکالر مستخرج از آن شامل نرخ کرنش، اتساع و دوران برای منطقه برخورد مایل صفحات زمین‌ساختی عربستان-اوراسیا برای نخستین بار در این تحقیق ارائه می‌شود.

برآورد نرخ کرنش و کمیت‌های اسکالر مستخرج از آن به روش‌های مختلف در مطالعات متعدد قبلی از جمله ورنانت و چری (۲۰۰۶)، راست‌بود و وثوقی (۱۳۸۹)، ماسون و همکاران (۲۰۱۴)، خرمی و همکاران (۲۰۱۹) و راست‌بود (۱۴۰۲) انجام گرفته است. مقایسه نتایج مطالعات قبلی و تحقیق حاضر اختلافاتی را مابین آنها نشان می‌دهد ولی در حالت کلی تمام مطالعات



شکل ۱۳. نمایش نرخ اتساع برآوردی برای منطقه برخورد مایل صفحات زمین‌ساختی عربستان-اوراسیا با مقیاس‌های (الف)  $q = 3 \sim 8$ ، (ب)  $q = 3 \sim 5$ ، (ج)  $q = 6$  و (د)  $q = 7$ .





شکل ۱۴. نمایش نرخ دوران برآوردی برای منطقه برخورد مایل صفحات زمین‌ساختی عربستان-اوراسیا با مقیاس‌های (الف)  $q = 3 \sim 8$ ، (ب)  $q = 3 \sim 5$ ، (ج)  $q = 6$  و (د)  $q = 7$ .

##### ۵. بحث و نتیجه‌گیری

منطقه خاص وجود داشته باشد، احتمالاً نیاز به وارد کردن موجک‌های با مقیاس کوتاه‌تر در برآورد است. دوم، اگر یک باقی‌مانده بزرگ در یک ایستگاه وجود داشته باشد، در این صورت وضعیت ایستگاه غیرعادی بوده و یا سیگنالی را دریافت می‌کند که از نظر مکانی حل نشده است.

برای به‌دست آوردن یک میدان سرعت برآوردی هموار از مشاهدات گسسته، به منظم‌سازی نیاز است. منظم‌سازی از دو طریق ممکن حاصل می‌شود. (۱) اول این که می‌توان مجموعه‌ای از موجک‌های کروی ممکن را بر اساس پوشش مشاهدات حذف کرد. اگر هر موجک کروی دارای تعداد کافی مشاهده تعیین‌کننده ضرایب باشد، در این صورت نیازی به منظم‌سازی نیست ( $\lambda = 0$ ). (۲) دوم این که اگر همه موجک‌های کروی برای مسئله معکوس استفاده شوند، در این صورت به منظم‌سازی گسترده نیاز خواهد بود، زیرا اکثر موجک‌ها مشاهدات تعیین‌کننده ضرایب متناظر خود را نخواهند داشت. در این تحقیق، مابین دو حالت (۱) و (۲) انتخاب شده است، یعنی در ابتدا بسیاری از موجک‌های کروی بر اساس پوشش داده حذف شده‌اند، ولی همچنان به مقدار متوسطی از منظم‌سازی صریح در وارون‌سازی نیاز است.

از آنالیز موجک می‌توان به‌عنوان میکروسوپ ریاضی استفاده کرد (اونسر، ۲۰۱۴). با توجه به این موضوع انجام

در این تحقیق برای نخستین بار برآورد چندمقیاسی میدان سرعت GPS در محدوده برخورد مایل صفحات زمین‌ساختی عربستان-اوراسیا با استفاده از موجک کروی انجام شد. بیان چندمقیاسی میدان سرعت برای شبکه‌های ژئودزی متراکم مناسب بوده و اجرای آن آسان است. برآورد چندمقیاسی میدان سرعت سه‌بعدی GPS نیز با استفاده از توابع چارچوب موجک کروی امکان‌پذیر است. مؤلفه قائم، در صورت وجود، باید در برآورد میدان سرعت استفاده شود، زیرا تغییرشکل غالب ممکن است در جهات مسطحاتی نباشد.

کمیت‌های گرادیان مستقیماً از میدان برآورد شده محاسبه می‌شوند تا سیگنال‌های تغییرشکل بالقوه شناسایی شوند. اولین عامل کنترل‌کننده برآورد، فاصله بین ایستگاه‌های شبکه است. هرچاکه ایستگاه‌ها متراکم باشند، موجک‌های کروی در مقیاس کوتاه در برآورد شرکت می‌کنند؛ و جایی که ایستگاه‌ها پراکنده هستند، فقط موجک‌های کروی در مقیاس بلند برآورد را انجام می‌دهند. خروجی برآورد می‌تواند به‌عنوان یک لایه اطلاعاتی در تحلیل‌های GIS مورد استفاده قرار گیرد.

در برآورد چندمقیاسی، میدان باقی‌مانده مابین میدان اولیه و میدان برآوردی می‌تواند دو ویژگی کلیدی را نشان دهد. اول این که اگر باقی‌مانده‌های سیستماتیکی در یک

سطحی زمین و شناسایی پدیده‌های مهم ژئوفیزیکی است.

### مراجع

راست بود، ا. (۱۴۰۲الف). تغییر شکل‌های معاصر پوسته ای در منطقه البرز بر اساس میدان سرعت GPS و توابع اسپلاین. *مجله ژئوفیزیک ایران*، ۱۷(۱)، ۱-۱۹.

راست بود، ا. (۱۴۰۲ب). تحلیل تغییر شکل قاره‌های زمان حاضر در محدوده فلات ایران با استفاده از تانسور کرنش مستخرج از مشاهدات دائم و دوره‌های GPS. *مجله فیزیک زمین و فضا*، ۴۹(۱)، ۹۷-۱۱۷.

راست بود، ا.، و وثوقی، ب. (۱۳۸۹). بررسی تغییر شکل بین‌لرزه‌ای در ناحیه برخورد صفحه‌های زمین‌ساختی عربستان و اوراسیا در منطقه خاورمیانه با استفاده از یک مدل تحلیلی. *مجله ژئوفیزیک ایران*، ۴(۲)، ۸۹-۱۰۲.

مجدد تحلیل‌های زمین‌ساختی با استفاده از میدان سرعت، نرخ کرنش، اتساع و دوران برآورد شده و با مقیاس‌های مختلف شبکه‌بندی پیشنهاد می‌شود. جهت بررسی محلی با توجه به تراکم داده‌های موجود و نتایج تحقیق حاضر شبکه با مقیاس‌های ۶ و ۷ برای این منظور مناسب است.

رفتارسنجی سیگنال‌های وابسته به زمان در شبکه‌های مترکم دائمی GPS پیشنهاد می‌شود. در این تحقیق، فقط به بخش مکانی مسئله پرداخته شد و نشان داده شد که نمایش چندمقیاسی برای شناسایی و مشخص کردن سیگنال‌های ژئوفیزیکی با هر مقیاسی مناسب است. همچنین این روش دارای قابلیت ویژه حذف نویزهای هر مقیاس است. این رویکرد گامی به سوی رفتارسنجی چندمقیاسی جهانی وابسته به زمان، برای میدان‌های سرعت GPS به‌منظور تعیین دقیق و مؤثر خصوصیات تغییر شکل

Antoine, J.P., & Vanderghenst, P. (1999). Wavelets on the 2-sphere: a group-theoretical approach, *Appl. Comput. Harmonic Anal.*, 7(3), 262–291.

Argus, D.F., Heflin, M.B., Peltzer, G., Crampe, F., & Webb, F.H. (2005). Interseismic strain accumulation and anthropogenic motion in metropolitan Los Angeles. *J. geophys. Res.*, 110, B04401, doi:10.1029/2003JB002934.

Bayer, M., Freeden, W., & Maier, T. (2001). A vector wavelet approach to iono- and magnetospheric geomagnetic satellite data. *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.*, 63, 581–597.

Beavan, J., & Haines, J. (2001). Contemporary horizontal velocity and strain rate fields of the Pacific-Australian plate boundary zone through New Zealand. *J. geophys. Res.*, 106(B1), 741–770.

Becker, T.W., Hardebeck, J.L., & Anderson, G. (2005). Constraints on fault slip rates of the southern California plate boundary from GPS velocity and stress inversions. *Geophys. J. Int.*, 160, 634–650.

Bogdanova, I., Vanderghenst, P., Antoine, J.R., Jacques, L., & Morvidone, M. (2005). Stereographic wavelet frames on the sphere. *Appl. Comput. Harmonic Anal.*, 19(2), 223–252.

Bos, A.G., Spakman, W., & Nyst, M.C.J. (2003). Surface deformation and tectonic setting of Taiwan inferred from a GPS velocity field. *J. geophys. Res.*, 108(B10), 2458, doi:10.1029/2002JB002336.

Chambodut, A., Panet, I., Manda, M., Diament, M., Holschneider, M., & Jamet, O. (2005). Wavelet frames: an alternative to spherical harmonic representation of potential fields. *Geophys. J. Int.*, 163(3), 875–899.

Dahlke, S., & Maass, P. (1996). Continuous wavelet transforms with applications to analyzing functions on spheres. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2(4), 379–396.

Dragert, H., Wang, K., & James, T.S. (2001). A silent slip event on the deeper Cascadia subduction interface. *Science*, 292, 1525–1528.

Feigl, K.L., King, R.W., & Jordan, T.H. (1990). Geodetic measurement of tectonic deformation in the Santa Maria fold and thrust belt, California. *J. geophys. Res.*, 95(B3), 2679–2699.

Freeden, W., & Windheuser, U. (1996). Spherical wavelet transform and its discretization. *Adv. Comput. Math.*, 5(1), 51–94.

Freeden, W., & Windheuser, U. (1997). Combined spherical harmonic and wavelet expansion—a future concept in earth's gravitational potential determination. *Appl. Comput. Harmonic Anal.*, 4, 1–37.

Frohling, E., & Szeliga, W. (2016). GPS constraints on interpolate locking within Makran subduction zone. *Geophys. J. Int.*, 205, 67–76.

Ghods A., Shabani E., Bergman E., Faridi M., Donner S., Mortezaejad G., & Aziz-Zanjani A. (2015). The Varzaghan–Ahar, Iran,

- Earthquake Doublet (Mw 6.4, 6.2): implications for the geodynamics of northwest Iran. *Geophys. J. Int.*, 203, 522–540.
- Guilloux, F., Fay, G., & Cardoso, J.-F. (2009). Practical wavelet design on the sphere, *Appl. Comput. Harmonic Anal.*, 26(2), 143–160.
- Haines, A.J., & Holt, W.E. (1993). A procedure for obtaining the complete horizontal motions within zones of distributed deformation from the inversion of strain rate data. *J. geophys. Res.*, 98(B7), 12 057–12 082.
- Hastie, T., & Loader, C. (1993). Local regression: automatic kernel carpentry. *Stat. Sci.*, 8(2), 120–143.
- Heki, K. (1997). Silent fault slip following an interplate thrust earthquake at the Japan Trench. *Nature*, 386, 595–598.
- Hessami, K., Jamali, F., & Tabassi, H. (2003). Major Active Faults of Iran (map), Ministry of Science, Research and Technology, International Institute of Earthquake Engineering and Seismology.
- Holschneider, M. (1996). Continuous wavelet transforms on the sphere. *J. Math. Phys.*, 37(8), 4156–4165.
- Holschneider, M., Chambodut, A., & Manda, M. (2003). From global to regional analysis of the magnetic field on the sphere using wavelet frames. *Phys. Earth planet. Inter.*, 135, 107–124.
- Hsu, Y.-J., Yu, S.-B., Simons, M., Kuo, L.-C., & Chen, H.-Y. (2009). Interseismic crustal deformation in the Taiwan plate boundary zone revealed by GPS observations, seismicity, and earthquake focal mechanisms, *Tectonophysics*, in press.
- Khorrani F., Vernant P., Masson F., Nilfouroushan F., Mousavi Z., Nankali H., Saadat S. A., Walpersdorf A., Hosseini S., Tavakoli P., Aghamohammadi A., & Alijanzade M. (2019). An up-to-date crustal deformation map of Iran using integrated campaign-mode and permanent GPS velocities. *Geophys. J. Int.*, 217, 832–843.
- Kovacevic, J., & Chebira, A. (2007a). Life beyond bases: the advent of frames (Part I). *IEEE Signal Process. Mag.*, 24(4), 86–104.
- Kovacevic, J., & Chebira, A. (2007b). Life beyond bases: the advent of frames (Part II). *IEEE Signal Process. Mag.*, 24(5), 115–125.
- Malvern, L.E., (1969). Introduction to the mechanics of a continuous medium, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, ISBN: 0134876032.
- Masson, F., Lehujeur, M., Ziegler Y., & Doubre, C. (2014). Strain rate tensor in Iran from a new GPS velocity field. *Geophys. J. Int.*, 197(1), 10–21, doi:10.1093/gji/ggt509.
- Matheron, G. (1963). Principles of geostatistics, *Econ. Geol.*, 58, 146–1266. McCaffrey, R. et al., 2007. Fault locking, block rotation and crustal deformation in the Pacific Northwest. *Geophys. J. Int.*, 169, 1315–1340.
- McCaffrey, R., Qamar, A. I., King, R. W., Wells, R., Khazaradze, G., Williams, C. A., Stevens, C. W., Vollick, J. J., & Zwick, P. C. (2007). Fault locking, block rotation and crustal deformation in the Pacific Northwest. *Geophys. J. Int.*, 169, 1315–1340.
- McGuire, J.J., & Segall, P. (2003). Imaging of aseismic fault slip transients recorded by dense geodetic networks. *Geophys. J. Int.*, 155, 778–788.
- Meade, B.J., & Hager, B.H. (2005). Block models of crustal motion in southern California constrained by GPS measurements. *J. geophys. Res.*, 110, B03403, doi:10.1029/2004JB003209.
- Meade, B.J., Hager, B.H., McClusky, S.C., Reilinger, R.E., Ergintav, S., Lenk, O., Barka, A., & Ozener, H. (2002). Estimates of seismic potential in the Marmara Sea region from block models of secular deformation constrained by Global Positioning System measurements. *Bull. seism. Soc. Am.*, 92, 208–215.
- Melbourne, T.I., Webb, F.H., Stock, J.M., & Reigber, C. (2002). Rapid postseismic transients in subduction zones from continuous GPS. *J. geophys. Res.*, 107(B10), 2241, doi:10.1029/2001JB000555.
- Menke, W. (1989). *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory*. Academic Press, San Diego, CA, USA, ISBN: 0124909213,9780124909212,0124909205,9780124909205,9780080507323.
- Miyazaki, S., McGuire, J.J., & Segall, P. (2003). A transient subduction zone slip episode in southwest Japan observed by the nationwide GPS array. *J. geophys. Res.*, 108(B2), 2087, doi:10.1029/2001JB000456.
- Miyazaki, S., Segall, P., Fukuda, J., & Kato, T. (2004). Space time distribution of afterslip following the 2003 Tokachi-oki earthquake: Implications for variations in fault zone frictional properties. *Geophys. Res. Lett.*, 31, L06623, doi:10.1029/2003GL019410.
- Oh, H.-S., & Li, T.-H. (2004). Estimation of global temperature fields from scattered observations by a spherical-wavelet-based spatially adaptive method. *J. R. Statist. Soc. B*, 66, 221–238.
- Ozawa, S., Murakami, M., Kaidzu, M., Tada, T., Sagiya, T., Hatanaka, Y., Yurai, H., & Nishimura, T. (2002). Detection and monitoring of the ongoing aseismic slip in the Tokai region, Central Japan. *Science*, 298, 1009–1012.
- Pritchard, M.E., & Simons, M. (2006). An aseismic slip pulse in northern Chile and



- along-strike variations in seismogenic behavior. *J. geophys. Res.*, 111, B08405, doi:10.1029/2006JB0042580.
- Raeesi, M., Zarifi, Z., Nilfouroushan, F., Boroujeni S., & Tiampo, K. (2017). Quantitative Analysis of Seismicity in Iran. *Pure Appl. Geophys.*, 174, 793-833.
- Reguzzoni, M., Sanso, F., & Venuti, G. (2005). The theory of general kriging, with applications to the determination of a local geoid. *Geophys. J. Int.*, 162, 303-314.
- Reilinger, R., McClusky, S., Vernant, P., Lawrence, S., Ergintav, S., Cakmak, R., Ozener, H., Kadirov, F., Guliev, I., Stepanyan, R., Nadariya, M., Hahubia, G., Mahmoud, S., Sakr, K., Arajehi, A., Paradissis, D., Al-Aydrus, A., Prilepin, M., Guseva, T., Evren, E., Dmitrova, A., Filikova, S. V., Gomez, F., Al-Ghazzi, R., & Karam, G. (2006). GPS constraints on continental deformation in the Africa-Arabia-Eurasia continental collision zone and implications for the dynamics of plate interactions. *J. geophys. Res.*, 111, doi:10.1029/2005JB004051.
- Rogers, G., & Dragert, H. (2003). Episodic tremor and slip on the Cascadia subduction zone: The chatter of silent slip. *Science*, 300, 1942-1943.
- Savage, J.C., & Prescott, W.H. (1976). Strain accumulation on the San Jacinto fault near Riverside, California. *Bull. seism. Soc. Am.*, 66(5), 1749-1754.
- Shen, Z.-K., Jackson, D.D., & Ge, B.X. (1996). Crustal deformation across and beyond the Los Angeles basin from geodetic measurements. *J. geophys. Res.*, 101(B12), 27 957-27 980.
- Silverman, B.W. (1986). Density Estimation for Statistics and Data Analysis, Vol. 26 of Monographs on Statistics and Applied Probability, Chapman and Hall, New York.
- Simons, F.J., Dahlen, F.A., & Wiecek, M.A. (2006). Spatiospectral concentration on a sphere. *SIAM Rev.*, 48(3), 504-536.
- Simons, M., & Hager, B.H. (1997). Localization of the gravity field and the signature of glacial rebound. *Nature*, 390, 500-504.
- Simons, M., Solomon, S.C., & Hager, B.H. (1997). Localization of gravity and topography: constraints on the tectonics and mantle dynamics of Venus. *Geophys. J. Int.*, 131, 24-44.
- Spakman, W., & Nyst, M.C.J. (2002). Inversion of relative motion data for estimates of the velocity gradient field and fault slip. *Earth planet. Sci. Lett.*, 203, 577-591.
- Talebian, M., Ghorashi, M., & Nazari, H. (2013). Seismotectonic map of the Central Alborz, Research Institute for Earth Sciences, Geological Survey of Iran.
- Tape, C., Muse, P., Simons, M., Dong, D., & Webb F. (2009). Multiscale estimation of GPS velocity fields. *Geophys. J. Int.* (2009) 179, 945-971.
- Tarantola, A. (2005). Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation, SIAM, Philadelphia, PA, USA, ISBN: 9780898715729, 0898715725.
- Teza, G., Pesci, A., & Galgaro, A. (2008). Grid strain and grid strain3: software packages for strain field computation in 2D and 3D environments. *Comput. Geosci.*, 34(9), 1142-1153.
- Unser, M. (2014). Wavelets: on the virtues and applications of the mathematical microscope. *Journal of Microscopy*, 255(3), 123-127.
- Vernant, P., & Chéry, J. (2006). Low Fault Friction in Iran Implies Localized Deformation for the Arabia-Eurasia Collision Zone. *Earth and Planetary Science Letters*, 246(3-4): 197-206.
- Wahba, G. (1981). Spline interpolation and smoothing on the sphere. *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, 2(1), 5-16.
- Walcott, R.I. (1973). Structure of the earth from glacio-isostatic rebound. *Annu. Rev. Earth planet. Sci.*, 1, 15-37.
- Wang, Z., & Dahlen, F.A. (1995). Spherical-spline parameterization of three-dimensional Earth. *Geophys. Res. Lett.*, 22, 3099-3102.
- Ward, S.N. (1998a). On the consistency of earthquake moment release and space geodetic strain rates: Europe. *Geophys. J. Int.*, 135, 1011-1018.
- Ward, S.N. (1998b). On the consistency of earthquake moment rates, geological fault data, and space geodetic strain: the United States. *Geophys. J. Int.*, 134, 172-186.
- Wiaux, Y., Jacques, L., & Vanderghynst, P. (2005). Correspondence principle between spherical and Euclidean wavelets. *Astrophys. J.*, 632(1), 15-28.