**The University of Tehran Press**

**Journal of Sustainable Energy Systems**

Home Page: https://ses.ut.ac.ir

Online ISSN: 2980-8693

# Economic Feasibility of Implementation of Load Curtailment and Critical Peak Pricing Schemes as Demand Response Programs to Network Consumption Management (Case study: Azerbaijan Regional Electrical Company)

**Tohid Nasiri[1] | Moein Moeini-Aghtaie[2*] | Amir Fayaz Heidari[3] | Babak Asadzadeh[4] | Maryam Horiyatkhah[5] | Kianoosh Choubineh[6]**

1. M.Sc. student, Department of Energy Engineering, Sharif University of Technology. Email: tohid.n74@gmail.com
2. Corresponding Author, Assistant Professor, Department of Energy Engineering, Sharif University of Technology. Email: moeini@sharif.edu
3. Department of Electrical Engineering, Sharif University of Technology. Email: fayazheidari.amir@gmail.com
4. Azerbaijan Regional Electrical Company. Email: b_asadzadeh@azrec.co.ir
5. Azerbaijan Regional Electrical Company. Email: horiyatkhah@azrec.co.ir
6. Ph.D. Candidate, Faculty of Energy Engineering and Sustainable Resources, University of Tehran. Email: k.choubineh@ut.ac.ir

**ARTICLE INFO**

**Article type:**
Research Paper

**Article History:**
Received 21 October 2022
Revised 20 November 2022
Accepted 15 Decemberb 2023
Published Online 27 December 2023

**Keywords:**
*Call option,*
*Demand response programs,*
*Critical peak pricing.*

**ABSTRACT**

With increased energy consumption, the need to find new ways and methods to supply electricity has become more pressing than ever, and the feasibility of growing generation capacity in the power system is limited due to some economic, political, and environmental constraints. As a result, in recent years, demand optimization has been studied, with an emphasis on the use of programs such as demand response programs. In this study, a proposed approach for assessing the real option of demand response programs for electric companies is offered to supply the best possible electricity to consumers. The typical load profile of the industrial pilot introduced by the Azerbaijan Regional Electrical Company, as well as the energy pricing in the electrical market, are analyzed, and the parameters needed to value the option of demand response programs are extracted before calculating the option value of the plans.

**Cite this article:** Nasiri, T.; Moeini-Aghtaie, M.; Fayaz Heidari, A.; Asadzadeh, B.; Horiyatkhah, M. & Choubineh, K. (2023). Economic Feasibility of Implementation of Load Curtailment and Critical Peak Pricing Schemes as Demand Response Programs to Network Consumption Management (Case study: Azerbaijan Regional Electrical Company). *Journal of Sustainable Energy Systems*, 2 (2), 123-142. DOI: http//doi.org/10.22059/ses.2023.366788.1041

© Tohid Nasiri, Moein Moeini-Aghtaie, Amir Fayaz Heidari, Babak Asadzadeh, Maryam Horiyatkhah, Kianoosh Choubineh. **Publisher:** University of Tehran Press.
DOI: http//doi.org/10.22059/ses.2023.366788.1041

## Introduction

Due to the rising cost of constructing generation units, transmission and distribution networks, and, on the other hand, budget constraints, the adoption of demand response programs to improve power system operation has been receiving a lot of attention in recent years. Because these programs reduce the need to build new generation units and expand transmission and distribution networks, they have a significant economic benefit for the power system. Demand response programs, which control sometimes reduce consumer use, attempt to smooth the network load curve and reduce peak demand, minimizing the possibility of network failures and thus improving the reliability of the power system.

Demand response, which is an integral component of smart grids, can significantly increase power system flexibility, which has numerous financial and technological benefits for the power sector. By lowering the network's peak usage, the demand response can postpone investments in network development and reinforcement while also minimizing the need for expensive equipment and environmental pollutants [1]. In critical conditions, demand response on the part of the system operator can be employed as a risk management technique in the power system. Demand response, in addition to the previously listed elements, can be utilized as a supplement to the deployment of renewable energy sources. According to studies, US energy efficiency programs and demand response can reduce the rate of increase in yearly electricity consumption in the US by 0.4-0.85% [2].

## Methodology

In this paper, a proposed approach for assessing the real option of demand response programs for electric companies is offered to supply the best possible electricity to consumers. The typical load profile of the industrial pilot introduced by the Azerbaijan Regional Electrical Company, as well as the energy pricing in the electrical market, are examined.

## Results and Conclusion

The economic advantage of employing the load curtailment strategy as well as CPP for a sample consumer in the system managed by Azerbaijan Regional Electrical Company was evaluated by analyzing the attractiveness of these programs for industrial subscribers. Evaluating the income generated by the usage of these two plans, as well as considering a viable solution to the existing challenges associated with the deployment of demand response plans, assists the company in deciding to invest in the field of demand response based on local needs. Furthermore, by defining the revenue that is earned through the implementation of the intended plans, the company can precisely define the incentives required for consumers. On the one hand, the correct definition of incentives causes consumers to have sufficient motivation to participate in the plan, which increases the consumer's participation rate. On the other hand, the costs of providing incentive plans are lower than the total income of the plans for the regional electrical company. The following are some of the objectives that can be attained using the method presented in this work:

- Encouraging consumers to collaborate with the electricity industry to control the peak load of the national power network
- Controlling and reducing the peak demand of the national power network
- Creating a suitable production reserve during the peak of the country's power network
- Preventing non-technical and uneconomical development of the national power network

فصلنامهٔ سیستم‌های انرژی پایدار
سایت نشریه: https://ses.ut.ac.ir
شاپا الکترونیکی: ۸۶۹۳-۲۹۸۰
انتشارات دانشگاه تهران

# امکان‌سنجی اقتصادی اجرای طرح قطع بار و قیمت اوج بحرانی به عنوان طرح‌های برنامهٔ پاسخ‌گویی بار به منظور مدیریت مصرف شبکه (نمونهٔ مورد مطالعه: شرکت برق منطقه‌ای آذربایجان)

توحید نصیری[۱] | معین معینی اقطاعی[۲*] | امیرفیاض حیدری[۳] | بابک اسدزاده[۴] | مریم حوریت‌خواه[۵] | کیانوش چوبینه[۶]

۱. دانش‌آموختهٔ مقطع کارشناسی ارشد مهندسی سیستم‌های انرژی، دانشکدهٔ مهندسی انرژی، دانشگاه صنعتی شریف. رایانامه: tohid.n74@gmail.com
۲. نویسندهٔ مسئول، استادیار دانشکدهٔ مهندسی انرژی، دانشگاه صنعتی شریف. رایانامه: moeini@sharif.edu
۳. دانش آموختهٔ مقطع کارشناسی ارشد مهندسی برق قدرت، دانشکدهٔ مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شریف. رایانامه: fayazheidari.amir@gmail.com
۴. شرکت برق منطقه‌ای آذربایجان. رایانامه: b_asadzadeh@azrec.co.ir
۵. شرکت برق منطقه‌ای آذربایجان. رایانامه: horiyatkhah@azrec.co.ir
۶. دانشجوی مقطع دکتری مهندسی سیستم‌های انرژی، دانشکدهٔ مهندسی انرژی و منابع پایدار، دانشگاه تهران. رایانامه: k.choubineh@ut.ac.ir

## اطلاعات مقاله

**نوع مقاله:**
پژوهشی

**تاریخ‌های مقاله:**
**تاریخ دریافت:** ۱۴۰۱/۰۷/۲۹
**تاریخ بازنگری:** ۱۴۰۱/۰۸/۲۹
**تاریخ پذیرش:** ۱۴۰۱/۰۹/۲۴
**تاریخ انتشار:** ۱۴۰۲/۱۰/۰۶

**کلیدواژه:**
*اختیار خرید،*
*برنامهٔ پاسخ‌گویی بار،*
*قیمت‌گذاری پیک بحرانی.*

## چکیده

امروزه با افزایش مصرف انرژی، نیاز به یافتن راه و روش‌های مختلف برای تأمین انرژی بیش از پیش احساس شده و با توجه به برخی محدودیت‌های اقتصادی، سیاسی و زیست‌محیطی امکان افزایش ظرفیت تولید در شبکهٔ برق محدود است. از این‌رو، در سال‌های اخیر، بهینه‌سازی سمت مصرف مورد توجه بوده و تمرکزها روی استفاده از برنامه‌هایی همچون برنامهٔ پاسخ‌گویی بار متمرکز بوده است. در این راستا، در این مقاله به منظور تأمین هرچه بهتر انرژی مورد نیاز مصرف‌کنندگان، روش پیشنهادی برای ارزش‌گذاری اختیار واقعی برنامه‌های پاسخ‌گویی بار برای شرکت‌های برق ارائه می‌شود. در ادامه پروفیل بار مشترک پایلوت صنعتی معرفی‌شده توسط شرکت برق منطقه‌ای آذربایجان و همچنین، قیمت انرژی در بازار برق تحلیل شده و پارامترهای مورد نیاز برای ارزش‌گذاری اختیار برنامه‌های پاسخ‌گویی بار، استخراج شده و در نهایت ارزش اختیار طرح‌ها محاسبه می‌شود.

**استناد:** نصیری، توحید؛ معینی اقطاعی، معین؛ حیدری، امیرفیاض؛ اسدزاده، بابک؛ حوریت‌خواه، مریم و چوبینه، کیانوش (۱۴۰۲). امکان‌سنجی اقتصادی اجرای طرح قطع بار و قیمت اوج بحرانی به عنوان طرح‌های برنامهٔ پاسخ‌گویی بار به منظور مدیریت مصرف شبکه (نمونهٔ مورد مطالعه: شرکت برق منطقه‌ای آذربایجان). *فصلنامهٔ سیستم‌های انرژی پایدار*، ۲ (۲) ۱۲۳-۱۴۲ . DOI: http//doi.org/10.22059/ses.2023.366788.1041

© توحید نصیری، معین معینی اقطاعی، امیرفیاض حیدری، بابک اسدزاده، مریم حوریت‌خواه، کیانوش چوبینه.
**ناشر:** مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران.
DOI: http//doi.org/10.22059/ses.2023.366788.1041

## ۱. مقدمه

نظر به رشد روزافزون مصرف انرژی الکتریکی با توجه به پیشرفت تکنولوژی، نیاز به افزایش تولید انرژی بیشتر شده است. همچنین، با توجه به افزایش تعداد مشترکان در سطح انتقال و توزیع، نیاز به توسعهٔ هر دو شبکهٔ انتقال و توزیع وجود دارد. به دلیل محدودیت‌های اقتصادی، زیست‌محیطی و گاه به دلیل سیاست‌های مد نظر کشورها، امکان افزایش ظرفیت تولید در شبکهٔ برق محدود است. با توجه به هزینهٔ سرسام‌آور توسعهٔ واحدهای تولیدی و شبکه‌های انتقال و توزیع و نظر به محدودیت بودجه، استفاده از برنامه‌های پاسخ‌گویی بار برای بهبود بهره‌برداری از سیستم قدرت، در سال‌های اخیر مورد توجه فراوان واقع شده است. در صورت استفاده از این برنامه‌ها، نیاز به احداث واحدهای تولیدی جدید و گسترش شبکه‌های انتقال و توزیع کمتر شده و لذا این برنامه‌ها ارزش اقتصادی قابل توجهی برای شبکهٔ قدرت دارند. برنامه‌های پاسخ‌گویی بار با کنترل و گاه کاهش میزان مصرف مشترکان به دنبال مسطح کردن منحنی بار شبکه و کاهش پیک مصرف و درنتیجه، کاهش احتمال بروز قطعی در شبکه است و از این طریق قابلیت اطمینان سیستم قدرت را افزایش می‌دهند.

پاسخ‌گویی بار به عنوان بخش جدایی‌ناپذیر از شبکه‌های هوشمند، می‌تواند انعطاف قابل توجهی را در سیستم ایجاد کند که مزایای اقتصادی و فنی بسیار زیادی برای صنعت برق به ارمغان می‌آورد. پاسخ‌گویی بار با کاهش پیک مصرف شبکه، نیاز به استفاده از واحدهای پرهزینه و آلودگی محیط زیستی را کاهش می‌دهد و همچنین، سرمایه‌گذاری برای تقویت و توسعهٔ شبکه را به تعویق می‌اندازد [۱]. پاسخ‌گویی بار از طرف بهره‌بردار سیستم می‌تواند به عنوان ابزاری برای مدیریت ریسک در سیستم در شرایط بحرانی مورد استفاده قرار گیرد. علاوه بر موارد یادشده، پاسخ‌گویی بار می‌تواند به عنوان یک مکمل برای بهره‌برداری از منابع انرژی تجدیدپذیر مورد استفاده قرار گیرد. مطالعات انجام‌شده تخمین زده‌اند که برنامه‌های راندمان انرژی ایالات متحده و پاسخ‌گویی بار می‌توانند به کاهش ۰/۴ الی ۰/۸۵ درصدی در نرخ افزایش مصرف برق سالانهٔ آمریکا منجر شوند [۲].

طی چند سال گذشته، رشد بار و افزایش هزینه‌های فناوری تولید، نیاز به اهمیت تشخیص رفتار مصرف‌کنندگان در بازارهای انرژی را به وجود آورده و کشورها را به سمت مسئلهٔ پاسخ‌گویی بار سوق داده است. تحولات و پیشرفت‌ها در برنامه‌های پاسخ گویی بار به طور قابل توجهی در سراسر اروپا متفاوت و منعکس‌کنندهٔ شرایط ملی بوده و ناشی از مجموعه‌های مختلفی از سیاست‌ها و برنامه‌های اجرایی است. بین سال‌های ۲۰۰۳ تا ۲۰۰۸ قانونی در سوئد برای کاهش مصرف انرژی صنایع در زمان پیک برای تأمین رزرو تا ظرفیت ۲۰۰۰ مگاوات وجود داشت [۳ و ۴]. همچنین در فنلاند برای سال‌های زیادی برنامهٔ قطع بار برای رزرو مورد استفاده قرار می‌گرفت. در سال ۲۰۰۵ ظرفیت پاسخ‌گویی بار صنایع فنلاند ۱۲۸۰ مگاوات تخمین زده شد که برابر ۹ درصد پیک مصرفی بازار فنلاند بود. در هلند، وزارت اقتصاد حدود ۱۰۰۰ تا ۱۵۰۰ مگاوات پتانسیل انرژی برای مدیریت مصرف از طریق قیمت بازار را تخمین زد. این برنامه که براساس سیستم بازار و معامله برای رزرو و رگولاتوری توان است، قرار است تا سال ۲۰۲۰ به صورت پیوسته افزایش یابد [۴ و ۵]. یک شرکت دانمارکی طی تحقیقی تخمین زده است که با اجرای برنامه‌های پاسخ‌گویی بار برای ۵۰ درصد از ۱۲۵ هزار مشترک خانگی دانمارک که از بخاری برقی استفاده می‌کنند، حدود ۲۶۰ مگاوات در روز عادی زمستانی که معادل ۶ درصد پیک بار کشور دانمارک است، صرفه‌جویی می‌شود [۶]. به همین دلیل، شرکت اصلی برق این کشور به منظور داشتن ۵۵۰ هزار دستگاه اندازه‌گیری هوشمند، شروع به نصب سالانه ۱۱۰ هزار دستگاه به مدت ۵ سال کرد. در نروژ نیز برنامه‌هایی برای به تأخیر انداختن نیاز به افزایش مقدار توان تولیدی اجرا شد که این امر منجر به کاهش مصرف ۱۰ درصدی در منطقهٔ اسلو در زمان پیک، افزایش دانش در مورد رفتار مصرف‌کننده و پیشبرد مدل انگیزشی برای مدیریت مصرف شد.

با توجه به قیمت‌های بالای انرژی در دوره‌های اوج، می‌توان مشتریان را تشویق کرد که بیشتر انرژی مصرفی خود را به ساعت‌های غیر اوج منتقل کنند. ظهور فناوری‌های شبکهٔ هوشمند، پاسخ‌گویی بار را با ایجاد ارتباطات بین شرکت‌ها و مصرف‌کنندگان افزایش داده و اطلاعات را شفاف‌تر کرده و به‌راحتی در دسترس قرار داده است که باعث ایجاد پیشرفت در برنامه‌های پاسخ‌گویی بار و مشارکت بالاتر در این برنامه‌ها شده است. اشکال مختلف برنامه‌های قیمت‌گذاری پویا که در سراسر ایالات متحده در حال اجرا هستند و یا طراحی شده‌اند، عبارت‌اند از: برنامهٔ زمان مصرف (TOU)، قیمت‌گذاری زمان واقعی،

قیمت‌گذاری پیک بحرانی (CPP) و کاهش پیک بحرانی. برنامهٔ CPP یکی از برنامه‌های پاسخ‌گویی بار مبتنی بر قیمت است که بخش اصلی آن را برنامهٔ TOU تشکیل می‌دهد با این تفاوت که در این برنامه، در برخی از ساعت‌های روز و یا در مواقعی که قیمت تولید بسیار زیاد است، قیمت مصرف برق در آن ساعت‌های بسیار بالاتر است که منعکس‌کنندهٔ قیمت واقعی برق با توجه به شرایط شبکه است. این برنامه در صورت طراحی صحیح می‌تواند به کاهش پیک شبکه منجر شده و همچنین باعث عدم ضرر شرکت‌های خرده‌فروش شود.

در حقیقت، پاسخ‌گویی بار را می‌توان به عنوان تغییر مصرف انرژی الکتریکی توسط مصرف‌کنندگان نهایی نسبت به الگوهای مصرف عادی آن‌ها در پاسخ به تغییر در قیمت برق طی زمان و یا درخواست شبکهٔ قدرت تعریف کرد. به منظور ترغیب مشترکان به مشارکت در برنامه‌های پاسخ‌گویی بار، شرکت‌های برق از جمله خرده‌فروشان، مشوق‌هایی را برای مشترکان در نظر می‌گیرند که مشترکان در مواقع اضطراری همچون افزایش قیمت برق و یا زمانی که قابلیت اطمینان شبکهٔ قدرت به خطر می‌افتد، مصرف انرژی خود را تغییر دهند [۷]. امروزه برای مدیریت ریسک برخی از پروژه‌های سرمایه‌گذاری از جمله پروژه‌های مربوط به مدیریت مصرف برق، از قراردادهایی به نام قراردادهای اختیار استفاده می‌شود. قیمت‌گذاری منصفانهٔ این نوع قراردادها موضوعی مهم و حیاتی برای طرفین معامله است. مطابق با این نظریه، طراحان پروژه برای اصلاح پروژه در پاسخ به تغییرات عدم قطعیت، از حق اختیار خود (نه الزام) استفاده می‌کنند. شناسایی و استفادهٔ مناسب از این اختیارات، انعطاف‌پذیری و ارزش مورد انتظار پروژه ها را افزایش و ریسک آن‌ها را کاهش می‌دهد [۸ و ۹]. برخی از این اختیارات عبارت‌اند از: اختیار ترک یا رهاسازی، اختیار انبساط، اختیار انقباض، اختیار تأخیر. یکی دیگر از انواع اختیارها، اختیار معامله است. قرارداد اختیار معامله، توافقی است بین دارندهٔ اختیار (تحصیل‌کننده یا خریدار اختیار) و واگذارکنندهٔ اختیار (فروشندهٔ اختیار) که به دارندهٔ اختیار، حق خرید یا فروش دارایی خاصی (اعم از دارایی‌های مالی و غیر مالی) را با قیمتی مشخص و در تاریخ معین در زمان آینده می‌دهد. انواع اختیار معامله عبارت‌اند از:

- اختیار اروپایی: این نوع اختیار معامله، به دارنده، اختیار خرید یا فروش دارایی را فقط در تاریخ سررسید می‌دهد. بنابراین دارندهٔ این نوع اختیار معامله طی دورهٔ قرارداد تا تاریخ سررسید، حق اعمال معامله را نخواهد داشت.
- اختیار امریکایی: این نوع قرارداد اختیار معامله، اختیار خرید یا فروش دارایی را به دارندهٔ اختیار از هنگام انعقاد قرارداد تا تاریخ سررسید می‌دهد.
- اختیار برمودایی: مشابه با اختیار نوع آمریکایی است، اما دارندهٔ این نوع اختیار فقط در زمان‌های خاصی که از قبل تعیین شده که این مجموعه زمان‌ها متناهی هستند، حق اعمال اختیار خود را دارد.

مرجع [۱۰] نظریهٔ اختیار را ارزیابی می‌کند و قابلیت استفاده از اختیار را برای سرمایه‌گذاری در انرژی تجدیدپذیر مورد بحث قرار می‌دهد. همچنین کاربردهای متنوع اختیار در سرمایه‌گذاری در انرژی تجدیدپذیر بیان شده و ارزیابی خط مشی‌ها صورت گرفته است. مرجع [۱۱] بر اساس محدودیت‌های سیاست تغییرات آب‌وهوایی، استفاده و ذخیره کردن کربن راهی مناسب برای کشورهای در حال توسعه برای تأمین انرژی و دستیابی به هدف کاهش دی‌اکسیدکربن به طور هم‌زمان ارائه می‌دهد. مرجع [۱۲] بیان می‌کند که در نظر گرفتن اختیار ترک که نوعی اختیار است و جزء اختیار امریکایی محسوب می‌شود، تأثیر شرایط بد عملیاتی را به حداقل می‌رساند و بنابراین ارزش اولیهٔ پروژه را افزایش می‌دهد. در مرجع [۱۳] سیاست‌های تولید بهینه با و بدون قرارداد اختیار معامله خرید نشان داده شده و نتیجه می‌شود که قرارداد اختیار معاملهٔ خرید می‌تواند برای هر دو خرده‌فروش و تأمین‌کنندهٔ سودمند باشد و باعث بهبود زنجیرهٔ تأمین کلی شود و انتشار کربن نامعتبر را کاهش دهد.

بررسی تاریخ ادبیات در این مبحث به‌وضوح نشان می‌دهد تا کنون در تمامی مطالعات صورت‌گرفته، فقط سود حاصل از اجرای برنامهٔ پاسخ‌گویی بار در نظر گرفته شده و ارزش ذاتی آن لحاظ نشده است. در حقیقت، این عامل اساسی که اختیار در اجرای برنامهٔ پاسخ‌گویی بار وجود دارد و صرف وجود این اختیار ارزشمند است، در هیچ‌یک از این مطالعات، در نظر گرفته نشده است. در همین راستا، این مقاله بر آن است تا پس از بررسی موانع موجود برای اجرای برنامه‌های پاسخ‌گویی بار برای مشترکان صنعتی، با ارائهٔ روش پیشنهادی خود مزیت اقتصادی ناشی از به‌کارگیری روش اختیار معامله و همچنین، CPP را برای یک

مصرف‌کنندهٔ نمونه در سیستم تحت مدیریت شرکت برق منطقه‌ای آذربایجان واقع در شهر تبریز ارزیابی کند. همچنین، در این روش پیشنهادی قیمت ذاتی خرید اختیار خرید، صرفهٔ اقتصادی داشتن یا نداشتن آن، گام‌های خرید اختیار و مراحل آن به طور کامل بیان شده‌اند.

## ۲. روش‌شناسی و مدل‌سازی

در این بخش ابتدا به روش درخت دوجمله‌ای، قیمت‌گذاری اختیار اروپایی و اوراق مشتقهٔ امریکایی را بیان می‌کنیم، به طوری که عایدی وابسته به مسیر نباشد. سپس به محاسبهٔ قیمت اختیار خرید برمودایی که نوعی اختیار امریکایی است، می‌پردازیم. می‌دانیم که اختیار معاملهٔ برمودایی، همانند اختیار معاملهٔ امریکایی همتای با آن اما در زمان‌های اعمال زودهنگام از پیش تعیین شده است. لذا مطالبی که در مورد اختیار معاملهٔ امریکایی بیان می‌شود، در مورد اختیار معاملهٔ برمودایی نیز برقرار است.

ابتدا به قیمت‌گذاری اختیار اروپایی که در بخش قبل بیان شد، اشاره می‌کنیم:

یک مدل درخت دوجمله‌ای N مرحله‌ای با فاکتور رو به بالای u، فاکتور رو به پایین d و نرخ بهرهٔ r را که در شرایط عدم آربیتراژ (no arbitrage) $0 < d < 1 + r < u$ هست، در نظر گیرید؛ به طوری که عایدی آن در زمان N به صورت $g(S_N)$ است. در این‌صورت ارزش اختیار اروپایی در مدل درخت دوجمله‌ای به ازای هر n که $0 \le n \le N$ است، به صورت رابطهٔ ۱ و ۲ است:

$$V_N(s) = max\{g(S_N), 0\} \quad (۱)$$

$$V_n(s) = \frac{1}{(1+r)}\left[p^* V_{n+1}(us) + q^* V_{n+1}(ds)\right] \quad (۲)$$

که در آن $p^* = \frac{1+r-d}{u-d}$ $q^* = \frac{u-1-r}{u-d}$ احتمالات ریسک خنثی هستند.

حال، مشتقهٔ امریکایی با تابع عایدی $g$ را در نظر بگیرید که در هر دوره $n \le N$ صاحب مشتقه می‌تواند اختیار خود را اعمال کرده و مقدار $g(S_n)$ را دریافت کند. بنابراین، ارزش سبد $X_n$ که موقعیت فروش را پوشش می‌دهد به ازای $n=0,1,2,...,N$ باید در $X_n \ge g(S_n)$ صدق کند و ارزش مشتقه در هر مرحلهٔ $n$ باید حداقل برابر $g(S_n)$ که ارزش ذاتی نامیده می‌شود، باشد [۹]. همچنین باید ارزش سبد در هر مرحله با ارزش مشتقه برابر باشد. بنابراین قیمت مشتقهٔ امریکایی در ادامه رابطهٔ ۱ به صورت رابطهٔ ۳ محاسبه می‌شود:

$$V_n(s) = \max\left\{g(S_n), \frac{1}{(1+r)}[p^* V_{n+1}(us) + q^* V_{n+1}(ds)\right\} \quad (۳)$$

اختیار معاملات آمریکایی به طور کلی به دلیل ویژگی اجرای زودهنگام، دارای ارزشی بزرگ‌تر یا مساوی با اختیار معاملهٔ اروپایی مشابه با خود هستند. توجه شود که مطالبی که در مورد اختیار معاملهٔ آمریکایی در حالت کلی ذکر می‌شود، در مورد اختیار معاملات برمودایی نیز برقرار است.

حال اختیار خرید برمودایی را به این صورت در نظر بگیرید که بازدهی آن مستقل از مسیر باشد. T تاریخ انقضا و $\tau = \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ مجموعه زمان‌های اجرای زودهنگام است. پارامترهای p، d و u را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که ارزش دارایی به صورت یک حرکت براونی هندسی با تلاطم $\boldsymbol{\sigma}$ و نرخ بهرهٔ r باشد. فرض کنید که دارایی سودی پرداخت نمی‌کند. در واقع می‌خواهیم پارامترهای روش دوجمله‌ای را با پارامترهای مدل بلک شولز هماهنگ کنیم، به طوری که وقتی $\Delta t \to 0$باشد، داشته باشیم (رابطهٔ ۴):

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dw_t \quad (۴)$$

که یک حرکت براونی استاندارد است. ابتدا بازهٔ T[0] را به N قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم (رابطهٔ ۵).

$$\Delta t = \frac{T}{N} \quad (۵)$$

بعد از n–امین گام، ارزش دارایی می‌تواند با احتمال p به مقدار $uS_n$ افزایش و یا به مقدار $dS_n$ با احتمال ۱-p کاهش یابد. هر درخت دوجمله‌ای دارای n+۱ گره است. برای هماهنگ شدن تلاطم با پارامترهای دیگر، پارامترها به صورت رابطهٔ ۶ است:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \ , d = \frac{1}{u} \rightarrow d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad (۶)$$

همچنین تحت اندازهٔ ریسک خنثی باید داشته باشیم (رابطهٔ ۷):

$$p^* = \frac{e^{\sigma\Delta t} - d}{u - d} \qquad (۷)$$

که تضمین می‌کند ارزش دارایی با نرخ ثابت r طی زمان رشد می‌کند و $q^* = ۱ - p^*$، با این انتخاب پارامترها، ارزش دارایی که توسط درخت دوجمله‌ای شبیه‌سازی می‌شود، یک حرکت براونی هندسی خواهد بود. به منظور قیمت‌گذاری اختیار معاملهٔ اروپایی $V_0(S_0)$ با تابع بازدهی $f(S_T)$ با استفاده از درخت دوجمله‌ای داشتیم (رابطهٔ ۸):

$$V_N\left(S_{N,i}\right) = f\left(S_{T,i}\right), i \in \{1,\dots,n+1\} \qquad (۸)$$

سپس رابطهٔ استقرایی بازگشتی زیر را از $N$ تا 0به کار می‌گرفتیم (رابطهٔ ۹):

$$V_{n-1}\left(S_{n-1,i}\right) = e^{-\sigma\Delta t}\left[p^* V_n\left(uS_{n,i}\right) + q^* V_n\left(dS_{n,i}\right)\right] \qquad (۹)$$

و به این‌ترتیب $V_0(S_0)$ به صورت بازگشتی محاسبه می‌شود [۱۴ و ۱۵]. حال برای ارزش‌گذاری اختیار برمودایی $V_0(S_0)$ رابطهٔ اصلاحی زیر را اضافه می‌کنیم؛ به طوری که اگر n-۱ یکی از تاریخ‌های اجرای زودرس باشد، آن‌گاه:

$$\hat{V}_{n-1}\left(S_{n,i}\right) = e^{-\sigma\Delta t}\left[p^* V_n\left(uS_{n,i}\right) + q^* V_n\left(dS_{n,i}\right)\right] \qquad (۱۰)$$

$$V_{n-1}\left(S_{n,i}\right) = \max\left\{\hat{V}_{n-1}\left(S_{n,i}\right), f\left(S_{T,i}\right)\right\} \qquad (۱۱)$$

در واقع الگوریتم زیر اجرا می‌شود:

$\boldsymbol{At\ maturity}: t_N = T$
$V_{N-1}\left(S_{N-1,j}\right) = e^{-r\Delta t}\left[p^* V_N\left(uS_{N,j+1}\right) + q^* V_N\left(S_{N,j-1}\right)\right]$
$\boldsymbol{For}\ i = N-2:-1:0$
$\boldsymbol{If}\ t_i \in \tau$
$V_i\left(S_{i,j}\right) = \max\left\{e^{-r\Delta t}\left[p^* V_N\left(S_{N,j+1}\right) + q^* V_N\left(S_{N,j-1}\right)\right], f\left(S_{i,j}\right)\right\}$
$\boldsymbol{Else}$
$V_i\left(S_{i,j}\right) = e^{-r\Delta t}\left[p^* V_N\left(S_{N,j+1}\right) + q^* V_N\left(S_{N,j-1}\right)\right]$
$\boldsymbol{End\ if}$
$\boldsymbol{End\ for}$

مطابق با توضیحات پیشین، استفاده از مدل دوجمله‌ای برای تعداد بازهٔ زمانی زیاد، عملاً غیرممکن است؛ چراکه تعداد مسیرها در مدل دوجمله‌ای، توان ۲ از تعداد بازه‌های زمانی است که این امر اقتصاددانان را به استفاده از مدل مونت کارلو سوق داده است.

**جدول ۱.** نتایج الگوریتم مونت کارلو- کمترین مربعات با تولید ۸ مسیر مختلف در زمان‌های مختلف (اعداد جدول ریسک اجرا در مقایسه با زمان صفر را بیان می‌کنند)

| مسیر | t=۰ | t=۱ | t=۲ | t=۳ |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۱ | ۱.۰۹ | ۱.۰۸ | ۱.۳۴ |
| ۲ | ۱ | ۱.۱۶ | ۱.۲۶ | ۱.۵۴ |
| ۳ | ۱ | ۱.۲۲ | ۱.۰۷ | ۱.۰۳ |
| ۴ | ۱ | ۰.۹۳ | ۰.۹۷ | ۰.۹۲ |
| ۵ | ۱ | ۱.۱۱ | ۱.۵۶ | ۱.۵۲ |
| ۶ | ۱ | ۰.۷۶ | ۰.۷۷ | ۰.۹۰ |
| ۷ | ۱ | ۰.۹۲ | ۰.۸۴ | ۱.۰۱ |
| ۸ | ۱ | ۰,۸۸ | ۱.۲۲ | ۱,۳۴ |

هرچند که محاسبهٔ ارزش اختیار خرید اروپایی به‌سادگی با مدل مونت کارلو قابل اجرا است، اما این مدل اولیهٔ مونت کارلو، برای محاسبهٔ ارزش اختیار خرید برمودایی قابل استفاده نیست [۱۶]. لذا در ادامه، محاسبهٔ ارزش اختیار خرید اروپایی با روش مونت کارلوـ کمترین مربعات بیان می‌شود.

### ۲. ۱. محاسبهٔ ارزش اختیار خرید برمودایی در مدل مونت کارلوـ کمترین مربعات[1]

این روش ابزار بسیار قدرتمندی برای تخمین قیمت اختیار معاملهٔ برمودایی، به‌خصوص هنگامی است که مسئله پیچیده است یا ابعاد بالاتری دارد. استفادهٔ کمترین مربعات در واژهٔ مونت کارلوـ کمترین مربعات به این علت است که تخمین عایدی مورد انتظار شرطی دارندهٔ اختیار از نگهداری اختیار و نه اجرای آنی آن، با کمترین مربعات صورت گرفته و قسمت مونت کارلو در عبارت مونت کارلوـ کمترین مربعات اشاره به این دارد که قیمت اختیار، در نهایت از طریق میانگین‌گیری از جریان‌های نقدی تنزیل‌شده برای هر مسیر نمونه‌ای از فرایند دارایی مد نظر حاصل می‌شود [۱۶]. در ادامه با ارائهٔ یک مثال، کلیات این مدل شرح داده می شود. استراتژی اعمال بهینه برای یک اختیار برمودایی در تاریخ سررسید نهایی، چنانچه به قیمت باشد، قابل اجرا است. مفهوم به قیمت یا in the money بودن در اختیار، زمانی اتفاق می‌افتد که عایدی اختیار مثبت باشد. استراتژی اعمال بهینه قبل از سررسید نهایی، به صورت مقایسه بین ارزش اعمال آنی با ارزش نگهداری جریان نقدی مورد انتظار و سپس اعمال آن در صورتی که ارزش آنی بیشتر باشد، اتفاق می‌افتد. بنابراین نکتهٔ اصلی اعمال بهینه در اختیار برمودایی، مشخص کردن ارزش مورد انتظار شرطی در صورت عدم اجرای آنی یا به بیانی نگهداری اختیار است. تخمین توابع مورد انتظار شرطی از طریق رگرسیون صورت خواهد گرفت [۱۶] به منظور تشریح بیشتر این روند و در نهایت، تخمین قیمت اختیار، ارائهٔ یک مثال ضروری به نظر می‌رسد.

مثال عددی: محاسبهٔ ارزش اختیار خرید برمودایی با مونت کارلوـ کمترین مربعات با استفاده از ۸ مسیر مجزا برای قیمت دارایی و حق اعمال اختیار در سه نقطه.

فرض کنید که اختیار خرید برمودایی با قیمت توافقی K=1.10 و r = 0.06 موجود است که در زمان‌های ۱ و ۲ و ۳ قابلیت اجرا دارد. زمان سوم، تاریخ سررسید اختیار است. حال الگوریتم مونت کارلوـ کمترین مربعات با تولید ۸ مسیر مختلف برای قیمت دارایی شرح داده می‌شود. مسیرهای نمونه‌ای تحت اندازه ریسک خنثی تولید شده‌اند که در جدول ۱ قابل رؤیت است.

**جدول ۲.** جریان نقدی در زمان سوم برحسب واحد پولی برای هر کیلووات ساعت

| مسیر | t=۱ | t=۲ | t=۳ |
|---|---|---|---|
| ۱ | – | – | ۰.۲۴ |
| ۲ | – | – | ۰.۴۴ |
| ۳ | – | – | ۰ |
| ۴ | – | – | ۰ |
| ۵ | – | – | ۰.۴۲ |
| ۶ | – | – | ۰ |
| ۷ | – | – | ۰ |
| ۸ | – | – | ۰.۲۴ |

حال به دنبال یافتن ماتریس جریان نقدی یا Cash-flow matrix در زمان سوم یعنی در تاریخ سررسید اختیار هستیم. لذا در زمان سوم، ارزش اختیار برمودایی خرید را برای تمام مسیرهای قیمت دارایی پیدا می‌کنیم. چون اختیار از نوع خرید است لذا با محاسبه در زمان سررسید، ستون آخر از جدول نقدی مشخص می‌شود و جدول فوق (جدول۲) را به دست می‌آوریم.

اکنون برای زمان دوم، با رابطهٔ بازگشتی رو به عقب، ستون دوم از این جدول را محاسبه می‌کنیم. یادآور می‌شویم که قبل از محاسبه باید مسیرهایی که اختیار در آن‌ها in the money است، مشخص شوند. تنها با یک محاسبهٔ ساده متوجه می‌شویم که در زمان دوم، مسیرهای اول، دوم، پنجم و هشتم، in the money هستند. در زمان دوم، دارندهٔ اختیار باید تصمیم اعمال یا عدم

1. Least Squares-Monte Carlo

اعمال اختیار را بگیرد. لذا فرض می‌کنیم که بردار X حاوی مقادیر قیمت دارایی در زمان دوم برای مسیرهای in the money باشد و Y بیانگر قیمت تنزیل‌شدهٔ جریان نقدی دریافتی در زمان سوم برای این سه مسیر به قیمت باشد، به طوری که اختیار در زمان دوم اعمال نشود (بیانگر ارزش نگهداری اختیار). X و Y به صورت جدول ۳ قابل نمایش هستند. برای تخمین جریان نقدی مورد انتظار از طریق عدم اجرا یا نگهداری طی عمر اختیار با شرط قیمت دارایی در زمان دوم، Y را از طریق چندجمله‌ای درجهٔ ۲، برازش می‌دهیم. لذا خواهیم داشت (رابطهٔ ۱۲):

$$E[Y|X] = -27.0919 + 39.5133X - 14.0341X \qquad (۱۲)$$

حال با توجه به این تابع مورد انتظار شرطی، ارزش اعمال آنی را با ارزش نگهداری (عدم اجرا) مقایسه می‌کنیم. با جای‌گذاری مقادیر X در تابع فوق، ارزش نگهداری اختیار در زمان دوم تخمین زده می‌شود که به‌اصطلاح به آن Continuation Value یا به اختصار CV گفته می‌شود. با مقایسهٔ فوق، مشخص می‌شود که اعمال اختیار برای مسیر پنجم، بهینه است. لذا ماتریس جریان نقدی در زمان دوم به صورت جدول ۴ است:

**جدول ۳.** In the money در زمان دوم

| مسیر | Y(قیمت تنزیل‌شده) | X(قیمت دارایی) |
|---|---|---|
| ۱ | - | - |
| ۲ | ۰.۴۴×۰.۹۴۱۷۶ | ۱.۲۶ |
| ۳ | - | - |
| ۴ | - | - |
| ۵ | ۰.۴۲×۰.۹۴۱۷۶ | ۱.۵۶ |
| ۶ | - | - |
| ۷ | - | - |
| ۸ | ۰.۲۴×۰.۹۴۱۷۶ | ۱.۲۲ |

**جدول ٤.** جریان نقدی در زمان دوم برحسب واحد پولی برای هر کیلووات ساعت

| مسیر | t=۱ | t=۲ | t=۳ |
|---|---|---|---|
| ۱ | - | ۰ | ۰.۲۴ |
| ۲ | - | ۰ | ۰.۴۴ |
| ۳ | - | ۰ | ۰ |
| ۴ | - | ۰ | ۰ |
| ۵ | - | ۰.۴۶ | ۰ |
| ۶ | - | ۰ | ۰ |
| ۷ | - | ۰ | ۰ |
| ۸ | - | ۰ | ۰.۲۴ |

توجه شود که وقتی اختیار در زمان دوم اجرا شود، در زمان سوم اجرای آن امکان‌پذیر نیست. لذا با توجه به اینکه در زمان دوم برای مسیر پنجم، امکان اعمال آنی وجود دارد، لذا در زمان سوم ارزش متناظر صفر خواهد شد. در t=۱ مسیرهای دوم و سوم و پنجم به قیمت هستند. برای این مسیرها دوباره Y را به عنوان ارزش تنزیل‌شده دنباله‌ای از جریان‌های نقدی اختیار تعریف می‌کنیم، اما از ارزش مورد انتظار شرطی Y تخمین زده شده در t=۲ در تعریف Y در t=۱ استفاده نمی‌کنیم. به طور مشابه Xقیمت سهام در زمان اول را برای مسیرهایی که اختیار به قیمت است نشان می‌دهد. تابع مورد انتظار شرطی در زمان یک با رگرسیون Y روی یک ثابت، X و $X^2$ حاصل می‌شود. لذا تابع شرطی تخمین‌زده‌شده برابر است با:

$$E[Y|X] = -82.0708 + 39.5133X - 14.0341X \qquad (۱۳)$$

**جدول ۵.** مقایسهٔ ارزش اجرا و ارزش نگهداری برحسب واحد پولی برای هر کیلووات ساعت

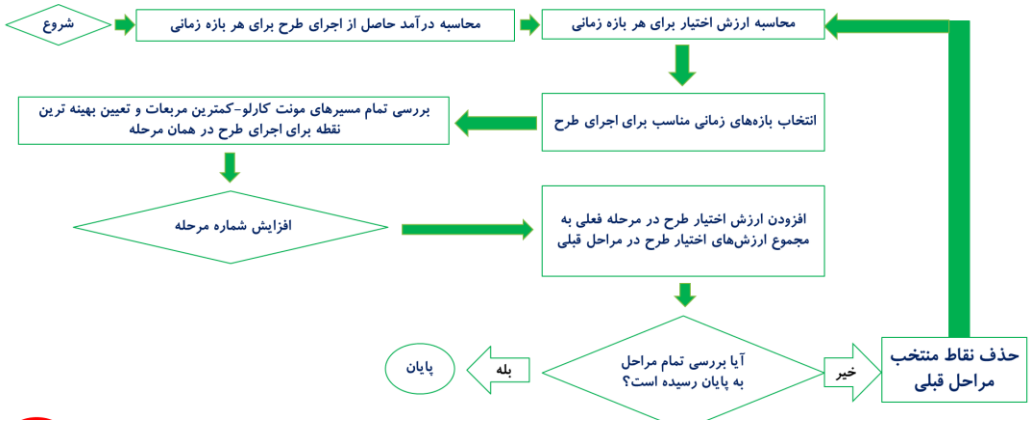
| مسیر | ارزش اجرا | ارزش نگهداری |
|---|---|---|
| ۱ | - | - |
| ۲ | ۰.۰۶ | ۰.۴۱۴۴ |
| ۳ | - | - |
| ۴ | - | - |
| ۵ | ۰.۰۱ | ۰.۴۰۸ |
| ۶ | - | - |
| ۷ | - | - |
| ۸ | – | – |

**جدول ٦.** جریان نقدی در زمان اول برحسب واحد پولی برای هر کیلووات ساعت

| مسیر | t=۱ | t=۲ | t=۳ |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۰ | ۰ | ۰.۲۴ |
| ۲ | ۰ | ۰ | ۰.۴۴ |
| ۳ | ۰.۱۲ | ۰ | ۰ |
| ۴ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۵ | ۰ | ۰.۴۶ | ۰ |
| ۶ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۷ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۸ | ۰ | ۰ | ۰.۲۴ |

با جای‌گذاری مقادیر X در تابع فوق، ارزش نگهداری اختیار در زمان یک تخمین زده می‌شود. حال مقایسهٔ ارزش اجرای آنی با ارزش نگهداری برای اعمال استراتژی بهینه انجام می‌شود. لذا ماتریس جریان نقدی اختیار به فرم جدول ۶ حاصل می‌شود. حال که ماتریس جریان نقدی اختیار خرید برمودایی، در طول مسیرهای مد نظر به طور کامل مشخص شد، برای تخمین قیمت اختیار خرید برمودایی کافی است که ارزش اختیار خرید برمودایی مشخص‌شده در هر مسیر در ماتریس فوق را به زمان صفر تنزیل کرد و سپس میانگین حاصل از همهٔ مسیرها را حساب کرد. با به‌کارگیری این فرایند و انجام گام‌به‌گام عملیات در متلب، قیمت مشتقهٔ یادشده برابر ۰/۱۶۱۲ است. فهم و پیاده‌سازی مثال یادشده، ما را در به‌کارگیری الگوریتم مونت کارلو- کمترین مربعات برای قیمت‌گذاری اختیار برمودایی با تعداد حق اعمال بالا، یاری خواهد کرد. پس از محاسبهٔ ارزش اختیار استفاده از طرح برای اولین‌بار مطابق روش بیان، باید بازه‌های زمانی مناسب برای اجرای طرح انتخاب شوند. پس از مشخص شدن نقاط بهینه در هر مسیر مطابق با توضیحات داده‌شده، بهینه‌ترین بازهٔ زمانی برای اجرای طرح در هر مسیر مشخص می‌شود.

به طور مشخص، در صورت داشتن حق مجدد اجرای طرح، مطابق روند گفته‌شده باید به دنبال یافتن نقاط بهینه برای اجرای طرح و همچنین تعیین ارزش اختیار طرح بود. در این راستا ابتدا باید نخستین حق اجرای طرح را منظور کرده و نقاط بهینهٔ انتخاب‌شده در این مرحله را حذف کرد؛ چراکه اگر نخستین اختیار اجرای طرح، استفاده شود، در صورت داشتن حق مجدد اجرا، نمی‌توان دوباره در بازهٔ زمانی بهینه مرحلهٔ نخست، از اختیار اجرای طرح استفاده کرد. به بیان دیگر، پس از محاسبهٔ ارزش اختیار طرح، نقاط بهینه برای استفاده از طرح، انتخاب شده و برای ارزش‌گذاری اختیار مجدد آن، باید اجرای طرح در اختیار قبلی منظور شود که برای این انجام امر کافی است که بازهٔ زمانی بهینهٔ انتخاب‌شده در مرحلهٔ اختیار قبلی از محاسبات کنار گذاشته شود. لذا در محاسبات مربوط به هر مرحلهٔ اختیار، پس از حذف نقاط بهینهٔ اختیار قبلی، به محاسبهٔ ارزش اختیار طرح و تعیین نقاط بهینه پرداخته می‌شود. درنتیجه کل ارزش اختیار طرح برابر مجموع ارزش‌های اختیار به‌دست‌آمده برای هر بار اختیار اجرا است. شکل ۱، روند پیشنهادی یادشده برای محاسبهٔ ارزش اختیار استفاده از طرح برای چندین‌بار حق اجرا طی مدت قرارداد را نشان می‌دهد.

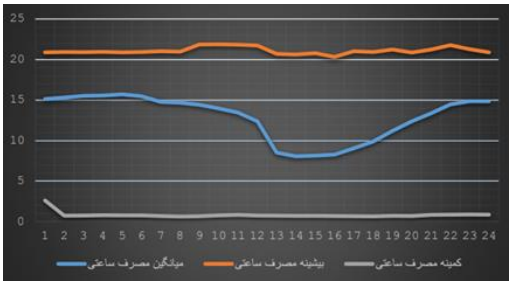



**شکل ۱.** الگوریتم اجرای روش پیشنهادی

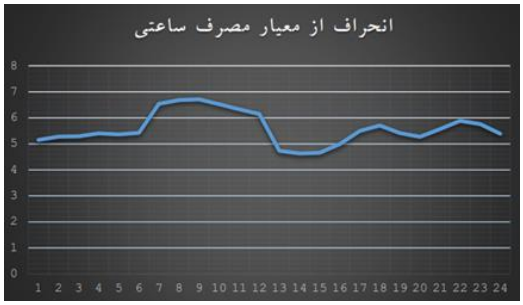
## ۳. نمونهٔ مورد مطالعه و تحلیل نتایج

به منظور ارزیابی روش و الگوریتم پیشنهادی، در این بخش یک نمونهٔ واقعی در صنعت ایران را در تابستان مورد تحلیل و بررسی قرار می‌دهیم. نمونهٔ مورد مطالعه شرکت سیمای خوی واقع در آذربایجان شرقی انتخاب شده است که توان آن توسط شرکت برق منطقه‌ای آذربایجان تأمین می‌شود و مشخصات تقاضای آن به صورت نمودار شکل‌های ۲ تا ۴ است.

**شکل ۲.** مصرف کل انرژی روزانهٔ مشترک در تابستان



**شکل ۳.** کمینه، بیشینه و میانگین مصرفی ساعتی مشترک




**شکل ٤.** انحراف از معیار ساعتی مشترک

به منظور ملموس بودن و امکان تشریح روند پیشنهادی برای ارزش‌گذاری طرح CPP، ۵ مسیر قیمتی متناظر با ۵ شبیه‌سازی مونت کارلو در نظر گرفته شده است. همچنین برای هر مسیر، ۵ بازه زمانی لحاظ شده است. مقدار اولیهٔ قیمت انرژی ۲۰ و تلاطم آن ۰/۲ فرض شده است. همچنین مقدار مصرف اولیه ۱۹ و تلاطم مصرف ۰/۳ لحاظ شده است. قیمت اعمال نیز ۲۰ و تعداد حق اجرا ۴ در نظر گرفته شده است. نرخ بهرهٔ سالانه نیز ۲۰ درصد فرض شده است. با توجه به اینکه تعداد حق اجرا ۴ فرض شده است، لذا ارزش اختیار و روند حل مسئله برای هر ۴ بار حق اجرا بررسی خواهد شد. طبق روش بیان‌شده در بخش قبل، جدول ۷ که بیانگر قیمت اختیار در اجرای اول و جدول ۸ که نشان‌دهندهٔ زمان‌های بهینهٔ اجرا است، به دست می‌آید.

**جدول ۷.** قیمت اختیار در اجرای اول برحسب تومان برای هر کیلووات ساعت

| مسیر | t=۰ | t=۱ | t=۲ | t=۳ | t=٤ |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۰ | ۶۵/۹۶ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۲ | ۰ | ۶۶۶/۸۴ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۳ | ۰ | ۲۵۹/۶۸ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۴ | ۰ | ۵۵۴/۳۶ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۵ | ۰ | ۱۱۸/۵۵ | ۰ | ۰ | ۰ |

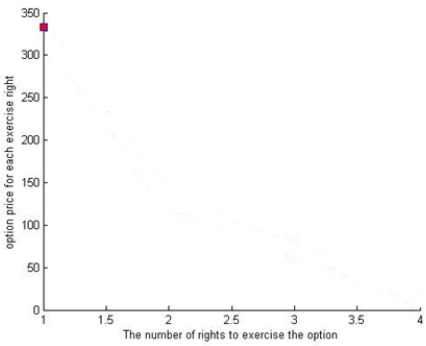
**جدول ۸.** مسیر بهینهٔ حرکت در اجرای اول (اعداد جدول متناظر با مرحلهٔ حق اجرا هستند)

| مسیر | t=۰ | t=۱ | t=۲ | t=۳ | t=٤ |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ |
| ۲ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۳ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۴ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ |
| ۵ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ |

حال ماتریس قیمت اختیار را تعریف می‌کنیم که ستون اول این ماتریس بیانگر ارزش اختیار در هریک از پنج مسیر است، که پیش‌تر نحوهٔ محاسبهٔ آن بیان شد. لذا ماتریس حاصل به فرم جدول ۷ است. البته لازم به ذکر است که ستون‌های دیگر این ماتریس به‌ترتیب، متناظر با قیمت اختیار برای سایر حق اجراها است که در ادامه محاسبهٔ آن‌ها به طور مبسوط بیان خواهد شد و لذا به طور پیش‌فرض در متلب صفر لحاظ می‌شود. به دلیل اینکه مسئلهٔ مفروض چهار حق اجرا دارد، لذا بردار میانگین قیمت اختیار شامل چهار ستون و یک سطر خواهد بود که درایهٔ اول بیانگر ارزش اختیار برای حق اجرای اول است. درایهٔ دوم تا چهارم بیانگر میانگین قیمت اختیار برای حق‌های اجرای دوم تا چهارم هستند که در مراحل بعد محاسبه خواهند شد. که نمودار حاصل به فرم شکل ۵ است. در این نمودار محور افقی بیانگر تعداد حق اجرا و محور عمودی ارزش اختیار است.

بردار میانگین قیمت اختیار (بر حسب میلیون تومان):

| اجرای اول | اجرای دوم | اجرای سوم | اجرای چهارم |
|---|---|---|---|
| ۳۳۳/۰۸۲۸ | | | |



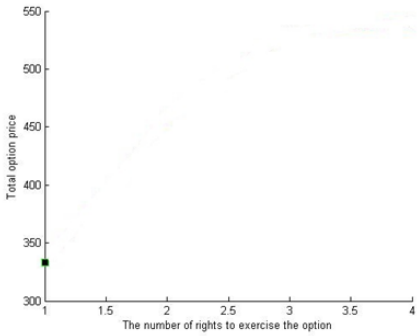

**شکل ۵.** ارزش اختیار اول (بر حسب میلیون تومان)

همچنین در حق اجرای اول به علت اینکه در صورت اجرای قرارداد تنها یک بار این اجرا صورت گرفته، لذا ارزش اختیار کلی برابر با ارزش اختیار در ماتریس قبلی است و داریم:

ارزش اختیار کلی (بر حسب میلیون تومان):

| اجرای چهارم | اجرای سوم | اجرای دوم | اجرای اول |
|---|---|---|---|
| | | | ۳۳۳/۰۸۲۸ |

لذا نمودار مربوط به آن به صورت شکل ۶ خواهد بود. که در آن محور افقی بیانگر تعداد حق اجرا و محور عمودی بیانگر ارزش اختیار کلی است.




**شکل ٦.** کل ارزش اختیار برای یک بار حق اجرا (بر حسب میلیون تومان)

تمام مباحث گفته‌شده بیانگر محاسبهٔ ارزش اختیار تنها با داشتن یک بار حق اجرا بود. حال همین روند را برای محاسبهٔ ارزش اختیار به منظور حق اجرای دوم خواهیم داشت. لازم به ذکر است که درآمد حاصل از اجرای طرح متناظر با درایه‌های بهینه برای حق اجرای اول، در حق اجرای دوم صفر منظور می‌شوند؛ زیرا نقاطی که یک بار، اختیار در آن اجرا شده باشد برای بار دوم نمی‌تواند کاندیدی برای زمان اجرا باشد. ماتریس زمان بهینه برای اجرای دوم به فرم جدول ۹ است که در آن عدد ۲ متناظر با حق اجرای دوم است.

**جدول ۹.** مسیر بهینهٔ حرکت در اجرای دوم (اعداد جدول متناظر با مرحلهٔ حق اجرا هستند)

| مسیر | t=۰ | t=۱ | t=۲ | t=۳ | t=٤ |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ |
| ۲ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۳ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ | ۲ |
| ۴ | ۰ | ۲ | ۰ | ۰ | ۱ |
| ۵ | ۰ | ۲ | ۰ | ۱ | ۰ |

حال متناظر با این زمان‌های بهینه برای اجرا، ستون دوم ماتریس قیمت، تعریف می‌شود. این ستون بیانگر قیمت اختیار در هریک از پنج مسیر، برای حق اجرای دوم است. لذا ماتریس حاصل به فرم جدول۱۰ است. به دلیل اینکه مسیرهای اول و دوم اجرای اختیار، برای حق اجرای دوم ارزشمند نبود، لذا قیمت اختیار متناظر در سطر اول و دوم از ستون دوم صفر حاصل شده است.

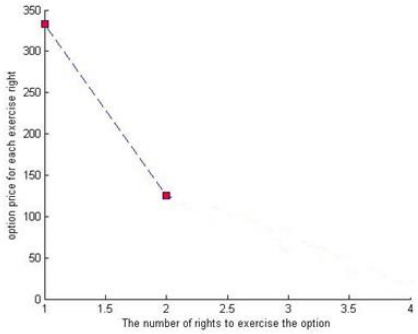
**جدول ۱۰.** قیمت اختیار در اجرای دوم برحسب تومان برای هر کیلووات ساعت

| مسیر | t=۰ | t=۱ | t=۲ | t=۳ | t=٤ |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۰ | ۶۵/۹۶ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۲ | ۰ | ۶۶۶/۸۴ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۳ | ۰ | ۲۵۹/۶۸ | ۱۱۴/۲۴ | ۰ | ۰ |
| ۴ | ۰ | ۵۵۴/۳۶ | ۴۰۴/۹۴ | ۰ | ۰ |
| ۵ | ۰ | ۱۱۸/۵۵ | ۱۰۹/۷۹ | ۰ | ۰ |

نمودار قیمت اختیار بر حسب حق اجرا به صورت شکل ۷ است.

بردار میانگین قیمت اختیار (بر حسب میلیون تومان):

| اجرای اول | اجرای دوم | اجرای سوم | اجرای چهارم |
|---|---|---|---|
| ۳۳۳/۰۸۲۸ | ۱۲۵/۷۹۷۷ | | |

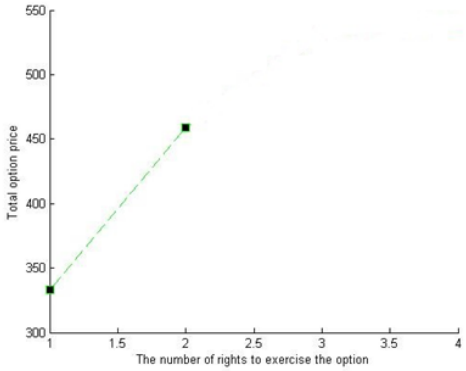



**شکل ۷.** ارزش اختیار اول و دوم (بر حسب میلیون تومان)

حال برای یافتن قیمت اختیار کلی برای حق اجرای دوم، کافی است تا قیمت اختیار برای حق اجرای اول و دوم را با هم جمع کنیم و لذا بردار قیمت اختیار کلی و نمودار مربوطه به فرم شکل ۸ خواهد بود.

ارزش اختیار کلی (بر حسب میلیون تومان):

| اجرای اول | اجرای دوم | اجرای سوم | اجرای چهارم |
|---|---|---|---|
| ۳۳۳/۰۸۲۸ | ۴۵۸/۸۸۰۵ | | |




**شکل ۸.** کل ارزش اختیار برای دو بار حق اجرا (بر حسب میلیون تومان)

به همین طریق نتیجهٔ اجرای سوم به صورت جدول‌های ۱۱ و ۱۲ خواهد بود که جدول ۱۱ مسیر بهینهٔ حرکت در اجرای سوم و جدول ۱۲ قیمت اختیار در اجرای سوم را نشان می‌دهند.

**جدول ۱۱.** مسیر بهینهٔ حرکت در اجرای سوم (اعداد جدول متناظر با مرحله حق اجرا هستند)

| مسیر | t=۰ | t=۱ | t=۲ | t=۳ | t=٤ |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ |
| ۲ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۳ | ۰ | ۰ | ۳ | ۱ | ۲ |
| ۴ | ۰ | ۲ | ۰ | ۳ | ۱ |
| ۵ | ۰ | ۲ | ۰ | ۱ | ۳ |

**جدول ۱۲.** قیمت اختیار در اجرای سوم برحسب تومان برای هر کیلووات ساعت

| مسیر | t=۰ | t=۱ | t=۲ | t=۳ | t=٤ |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۰ | ۶۵/۹۶ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۲ | ۰ | ۶۶۶/۸۴ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۳ | ۰ | ۲۵۹/۶۸ | ۱۱۴/۲۴ | ۴۷/۰۶ | ۰ |
| ۴ | ۰ | ۵۵۴/۳۶ | ۴۰۴/۹۴ | ۲۳۸/۲۹ | ۰ |
| ۵ | ۰ | ۱۱۸/۵۵ | ۱۰۹/۷۹ | ۸۰/۳۱ | ۰ |

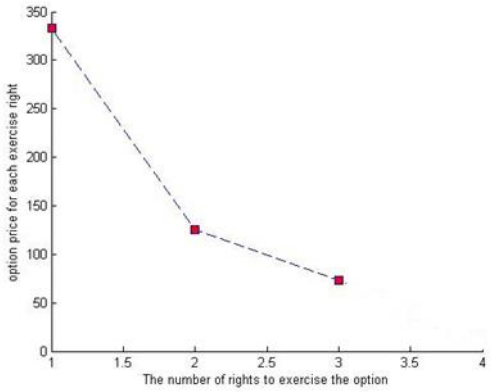
همچنین بردارهای میانگین قیمت اختیار و ارزش اختیار نیز به صورت زیر خواهند بود که نمودارهای آن‌ها در شکل‌های ۹ و ۱۰ نشان داده شده‌اند.

بردار میانگین قیمت اختیار (بر حسب میلیون تومان):

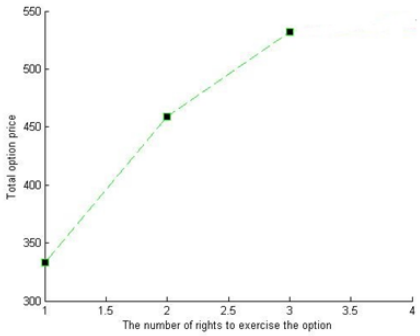
| اجرای چهارم | اجرای سوم | اجرای دوم | اجرای اول |
|---|---|---|---|
| | ۷۳/۱۳ | ۱۲۵/۷۹۷۷ | ۳۳۳/۰۸۲۸ |

ارزش اختیار کلی (بر حسب میلیون تومان):

| اجرای چهارم | اجرای سوم | اجرای دوم | اجرای اول |
|---|---|---|---|
| | ۵۳۲/۰۱ | ۴۵۸/۸۸۰۵ | ۳۳۳/۰۸۲۸ |




**شکل ۹.** ارزش اختیار اول و دوم و سوم (بر حسب میلیون تومان)




**شکل ۱۰.** کل ارزش اختیار برای سه بار حق اجرا (بر حسب میلیون تومان)

به همین طریق، نتایج اجرای چهارم نیز به صورت جدول‌های ۱۳ و ۱۴ خواهند بود. جدول ۱۳ مسیر بهینهٔ حرکت و جدول ۱۴ نیز قیمت اختیار خرید را در اجرای چهارم بیان می‌کنند.

**جدول ۱۳.** مسیر بهینهٔ حرکت در اجرای چهارم (اعداد جدول متناظر با مرحله حق اجرا هستند)

| مسیر | t=۰ | t=۱ | t=۲ | t=۳ | t=٤ |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ |
| ۲ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۳ | ۰ | ۴ | ۳ | ۱ | ۲ |
| ۴ | ۰ | ۲ | ۰ | ۳ | ۱ |
| ۵ | ۰ | ۲ | ۴ | ۱ | ۳ |

**جدول ١٤.** قیمت اختیار در اجرای چهارم برحسب تومان برای هر کیلووات ساعت

| مسیر | t=۰ | t=۱ | t=۲ | t=۳ | t=٤ |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۰ | ۶۵/۹۶ | ۰ | ۰ | ۱ |
| ۲ | ۰ | ۶۶۶/۸۴ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۳ | ۰ | ۲۵۹/۶۸ | ۱۱۴/۲۴ | ۴۷/۰۶ | ۱۲/۵۶ |
| ۴ | ۰ | ۵۵۴/۳۶ | ۴۰۴/۹۴ | ۲۳۸/۲۹ | ۰ |
| ۵ | ۰ | ۱۱۸/۵۵ | ۱۰۹/۷۹ | ۸۰/۳۱ | ۲۸/۰۲ |

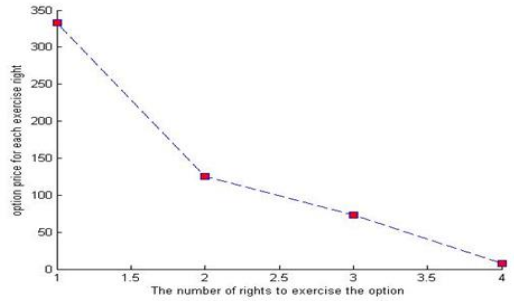
به طریق مشابه اجراهای قبلی بردار میانگین قیمت اختیار و ارزش اختیار کلی آن به صورت زیر و شکل‌های ۱۱ و ۱۲ است.

بردار میانگین قیمت اختیار (بر حسب میلیون تومان):

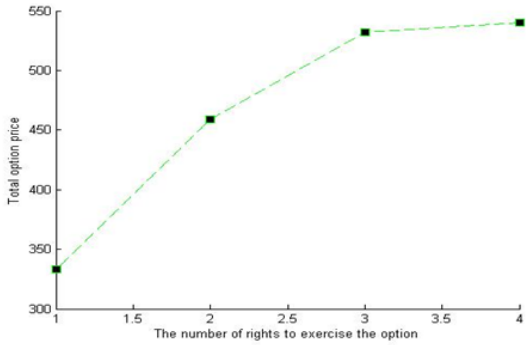
| اجرای چهارم | اجرای سوم | اجرای دوم | اجرای اول |
|---|---|---|---|
| ۸/۱۱ | ۷۳/۱۳ | ۱۲۵/۷۹۷۷ | ۳۳۳/۰۸۲۸ |

ارزش اختیار کلی (بر حسب میلیون تومان):

| اجرای چهارم | اجرای سوم | اجرای دوم | اجرای اول |
|---|---|---|---|
| ۵۴۰/۱۳ | ۵۳۲/۰۱ | ۴۵۸/۸۸۰۵ | ۳۳۳/۰۸۲۸ |




**شکل ۱۱.** ارزش اختیار اول و دوم و سوم و چهارم (بر حسب میلیون تومان)




**شکل ۱۲.** کل ارزش اختیار برای چهار بار حق اجرا (بر حسب میلیون تومان)

در نهایت با ادامهٔ روند بیان‌شده، ماتریس بهینه، قیمت اختیار، میانگین قیمت اختیار و قیمت اختیار کلی برای هر چهار حق اجرا به دست آمد. با ملاحظهٔ نمودارهای فوق برای هر چهار حق اجرا ملاحظه می‌شود که با افزایش حق اجرا، ارزش اختیار کاهش می‌یابد، به طوری که از مرحله‌ای به بعد، اجرای آن ارزشمند نخواهد بود.

با مشاهدهٔ نتایج یادشده ملاحظه می‌شود که قیمت اختیار برای حق اجرای بعدی کمتر از حق اجرای قبلی و در عین حال قیمت اختیار کلی برای حق اجرای بعدی، بالاتر از حق اجرای قبلی است. این مطلب دور از انتظار نیست، زیرا با اندکی تأمل درمی‌یابیم مقادیر متناظر با نقاط بهینه در حق اجرای اول بیش از مقادیر متناظر با نقاط بهینه در حق اجرای دوم است و این مطلب (روند نزولی) به‌وضوح در نمودار مشاهده می‌شود. نمودار قیمت کلی اختیار نیز با توجه به اینکه متناظر با هر حق اجرا، قیمت اختیار در حق اجرای قبلی به قیمت اختیار در حق اجرای حاضر اضافه می‌شود، روند صعودی خواهد داشت. لازم به ذکر است که برای یافتن قیمت اختیار در حق اجرای بالاتر، درآمد حاصل از اجرای طرح در نقاط متناظر با درایه‌های بهینه در حق اجرای قبلی، صفر منظور می‌شوند، زیرا نقاطی که اختیار در آن اجرا شده باشد برای حق اجرای بعدی نمی‌تواند کاندیدی برای زمان اجرا باشد.

### ۳. ۱. ارزش‌گذاری اقتصادی طرح CPP و قطع بار برای مشترک پایلوت

با توجه به این حقیقت که ماهیت برنامه‌های CPP از نوع اختیار خرید برمودایی است، همچنین امکان اجرای چندین‌بارهٔ اختیار، روش مونت کارلو- کمترین مربعات جامع‌ترین روش برای برنامه‌های پاسخ‌گویی بار مد نظر از جمله CPP، است که البته با توجه به امکان اجرای چندین‌بارهٔ اختیار، نیاز به ارائهٔ روشی جدید است. لذا ارزش اختیار محاسبه‌شده در طرح CPP برای سیمان آذرابادگان خوی با انتخاب ۲۲۳۲ بازه زمانی و ۵ هزار شبیه‌سازی مونت کارلو و ۸۰ ساعت حق اجرای طرح با پارامترهای زیر، ۲۶ میلیون تومان حاصل می‌شود. به بیان دیگر، مبلغ عادلانه برای پرداخت به سیمان آذرابادگان خوی به منظور درخواست از آن برای مشارکت در طرح CPP برابر ۲۶ میلیون تومان است.

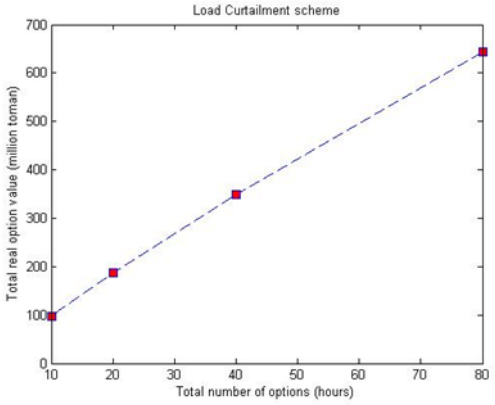
- میانگین مصرف ساعتی شرکت سیمان: ۱۲/۹ مگاوات
- تلاطم مصرفی ساعتی شرکت سیمان: ۶/۲۴ مگاوات
- قیمت اولیه انرژی: ۶۲/۹ هزار تومان بر مگاوات ساعت
- تلاطم انرژی: ۱/۵۶ هزار تومان بر مگاوات ساعت
- نرخ بهرهٔ سالانه: ۲۰ درصد

شرکت برق منطقه‌ای در صورت اجرای برنامهٔ طرح قطع بار، امکان درخواست کاهش مصرف به میزان ازپیش‌تعیین‌شده را دارد. در حقیقت شرکت برق منطقه‌ای، اختیار استفاده از طرح قطع بار را برای تعداد مشخصی از روزهای سال، از مشترک خریداری کرده و درنتیجه ریسک خود در زمینهٔ عدم توانایی در فراهم کردن انرژی مورد نیاز شبکه را کاهش می‌دهد. بنابراین، شرکت برق منطقه‌ای با عقد قرارداد طرح قطع بار به عنوان قرارداد اختیار با مشترک، حق کاهش مصرف انرژی در برخی از روزهای سال را از مشترک خریداری می‌کند. ارزش اختیار محاسبه‌شده در طرح قطع بار برای شرکت سیمان برابر ۶۴۳ میلیون تومان حاصل می‌شود. به بیان دیگر، مبلغ عادلانه برای پرداخت به سیمان آذرابادگان خوی به منظور درخواست از آن برای مشارکت در طرح قطع بار ۶۴۳ میلیون تومان است.

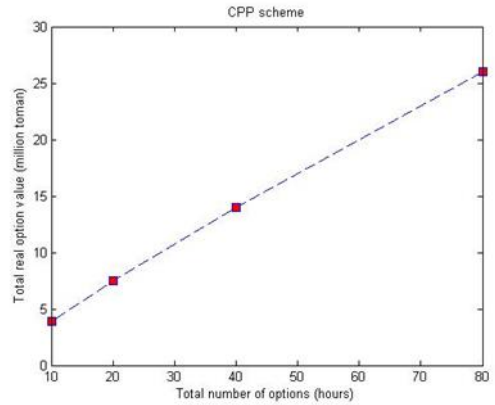
با توجه به ارزش حاصل از برنامهٔ CPP و طرح قطع بار، شرکت توانیر باید تصمیماتی مبنی بر سهولت استفاده از دو طرح پاسخ‌گویی بار یادشده ارائه کند. جدول ۱۵ تأثیر تعداد ساعت مشارکت شرکت سیمان بر پاداش مشارکت (برحسب میلیون تومان) در طرح‌های قطع بار و CPP را نشان می‌دهد. آنالیز حساسیت روی تأثیر تعداد ساعت مشارکت شرکت سیمان بر میزان پاداش طرح قطع بار و CPP در شکل‌های زیر نشان داده شده است:

**جدول ۱۵.** تأثیر تعداد ساعت مشارکت بر پاداش مشارکت برحسب میلیون تومان

| تعداد اختیار | ۱۰ | ۲۰ | ٤۰ | ۸۰ |
|---|---|---|---|---|
| پاداش مشارکت در طرح قطع بار | ۹۸ | ۱۸۸ | ۳۵۰ | ۶۴۳ |
| پاداش مشارکت در طرحCPP | ۳/۹ | ۷/۵ | ۱۴ | ۲۶ |




**شکل ۱۳.** آنالیز حساسیت روی تأثیر تعداد ساعت مشارکت بر میزان پاداش طرح قطع بار




**شکل ١٤.** آنالیز حساسیت روی تأثیر تعداد ساعت مشارکت بر میزان پاداش طرح CPP برحسب میلیون تومان

**جدول ١٦.** پاداش ساعتی مشارکت برحسب میلیون تومان

| تعداد اختیار | ۱۰ | ۲۰ | ٤٠ | ۸۰ |
|---|---|---|---|---|
| پاداش مشارکت در طرح قطع بار | ۹ | ۸,۲ | ۷ | ۶,۶ |
| پاداش مشارکت در طرح CPP | ۰,۳۵ | ۰,۳۲ | ۰,۲۷ | ۰,۲۵ |

با ملاحظه نمودارهای زیر که ارزش اختیار دهمین، بیستمین، چهلمین و هشتادمین ساعت اجرای طرح را برای هر یک از طرح‌های قطع بار و CPP برای شرکت سیمان نشان می‌دهند، ملاحظه می‌شود ارزش اختیار دهمین ساعت اجرای طرح با ارزش‌تر از بقیه است. به بیان دیگر، ارزش طرح‌ها در اختیارهای اولیه با ارزش‌تر بوده و با افزایش شمارهٔ اختیار، ارزش اختیار آن اجرا (نه ارزش کل اختیار) کاهش می‌یابد، به طوری که از مرحله‌ای به بعد، دیگر طرح ارزشمند نخواهد بود. پاداش ساعتی مشارکت در طرح‌های اختیار قطع بار و CPP نیز به صورت جدول ۱۶ است.

جدول ۱۵ نیز گویای این حقیقت است که ارزش اختیار طرح قطع بار برای شرکت سیمان در اختیار اجرای دهمین ساعت، برابر ۹ میلیون تومان و در اختیار اجرای بیستمین ساعت برابر ۸/۲ میلیون تومان است؛ به بیانی ارزش اختیار طرح قطع بار در اختیار اجرای بیستم، کمتر از ارزش اختیار در اختیار اجرای دهم است. لذا با دقت در شکل و جدول یادشده مشاهده می‌شود که ارزش اختیار هر اجرای طرح قطع بار با افزایش تعداد حق اجرا در حال کاهش به صورت نمایی است. استدلال مشابه برای ارزش اختیار طرح CPP نیز صادق است.

## ۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله، ابتدا ادبیات موضوع مرتبط با پروژه بررسی شده و سپس روش پیشنهادی برای ارزش‌گذاری اختیار واقعی برنامه‌های پاسخ‌گویی بار مد نظر شرکت برق منطقه‌ای ارائه شد. در ادامه پروفیل بار مشترک پایلوت صنعتی معرفی‌شده توسط شرکت برق منطقه‌ای آذربایجان و همچنین، قیمت انرژی در بازار برق تحلیل شده و پارامترهای مورد نیاز برای ارزش‌گذاری اختیار برنامه‌های پاسخ‌گویی بار، استخراج شده و در نهایت ارزش اختیار طرح‌ها محاسبه شدند.

با بررسی میزان جذابیت این برنامه‌ها برای مشترکان صنعتی، مزیت اقتصادی ناشی از به‌کارگیری رویکرد قطع بار و همچنین CPP را برای یک مصرف‌کنندهٔ نمونه در سیستم تحت مدیریت شرکت برق منطقه‌ای آذربایجان ارزیابی شد. ارزیابی درآمد ناشی از به‌کارگیری این دو طرح با در نظر گرفتن راهکاری مناسب برای برطرف کردن مشکلات موجود برای اجرای طرح‌های پاسخ گویی بار، شرکت را در تصمیم‌گیری برای سرمایه‌گذاری در حوزهٔ مدیریت تقاضا با توجه به نیازهای بومی یاری می‌کند. به علاوه، با مشخص شدن درآمدهای ناشی از اجرای طرح‌های مدنظر، شرکت می‌تواند مشوق‌های مورد نیاز برای مصرف‌کنندگان را به صورت دقیق تعریف کند. تعریف صحیح مشوق‌ها سبب می‌شود تا مصرف‌کنندگان از یک‌سو انگیزهٔ کافی برای مشارکت در طرح را داشته که این خود باعث افزایش میزان مشارکت مشترکان می‌شود و از سوی دیگر، هزینه‌های ارائهٔ طرح‌های تشویقی پایین‌تر از درآمد کلی طرح‌ها برای شرکت برق منطقه‌ای باشد. از جمله اهدافی که می‌توان از روش پیشنهادی این مقاله برای نیل به آن ها بهره برد می‌توان موارد زیر را برشمرد:

- تشویق مشترکان به همکاری با صنعت برق برای کنترل بار پیک شبکهٔ سراسری برق
- کنترل و کاهش پیک شبکهٔ سراسری برق
- ایجاد ذخیرهٔ تولید مناسب هنگام پیک شبکهٔ برق کشور
- جلوگیری از توسعهٔ غیرفنی و غیراقتصادی شبکهٔ سراسری برق
- جلوگیری از هرگونه خاموشی ناخواسته در شبکهٔ سراسری برق و تداوم پایدار برق‌رسانی به مشترکان

## منابع


[1] A. N. Shiryaev, *Essentials of stochastic finance: facts, models, theory*, vol. 3. World scientific, 1999.

[2] J. C. Cox, S. A. Ross, and M. Rubinstein, "Option pricing: A simplified approach," *J. financ. econ.*, vol. 7, no. 3, pp. 229–263, 1979.

[3] A. Azar and M. Momeni, "Statistics and its application in management," *Samt Publ. Second Vol. tenth Publ.*, 2006.

[4] G. B. Folland, *Real analysis: modern techniques and their applications*, vol. 40. John Wiley & Sons, 1999.

[5] "P. Plotter, 'Stochastic integration and differential equation,' Stochastic Modeling and Applied Probability, vol. 21, 2005."

[6] N. Ikeda and S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*. Elsevier, 2014.

[7] J. L. Devore, *Probability and Statistics for Engineering and the Sciences*. Cengage Learning, 2015.

[8] E. A. Martinez-Cesena and J. Mutale, "Wind power projects planning considering real options for the wind resource assessment," *IEEE Trans. Sustain. Energy*, vol. 3, no. 1, pp. 158–166, 2011.

[9] D. V. Widder, *The heat equation*, vol. 67. Academic Press, 1976.

[10] L. Liu, M. Zhang, and Z. Zhao, "The application of real option to renewable energy investment: a review," *Energy Procedia*, vol. 158, pp. 3494–3499, 2019.

[11] B. Lin and Z. Tan, "How much impact will low oil price and carbon trading mechanism have on the value of carbon capture utilization and storage (CCUS) project? Analysis based on real option method," *J. Clean. Prod.*, vol. 298, p. 126768, 2021.

[12] H.-L. Zhou, B.-J. Tang, and H. Cao, "Abandonment decision-making of overseas oilfield project coping with low oil price," *Comput. Econ.*, vol. 55, pp. 1171–1184, 2020.

[13] H. Zhao, S. Song, Y. Zhang, Y. Liao, and F. Yue, "Optimal decisions in supply chains with a call option contract under the carbon emissions tax regulation," *J. Clean. Prod.*, vol. 271, p. 122199, 2020.

[14] L. Jiang, "Monte Carlo pricing of Bermudan-style derivatives with lower and upper bound methods." University of Twente, 2012.

[15] R. Korn, E. Korn, and G. Kroisandt, *Monte Carlo methods and models in finance and insurance*. CRC press, 2010.

[16] F. A. Longstaff and E. S. Schwartz, "Valuing American options by simulation: a simple least-squares approach," *Rev. Financ. Stud.*, vol. 14, no. 1, pp. 113–147, 2001.