مجلهٔ فیزیک زمین و فضا، دوره ۳۴، شماره ۴، ۱۳۸۷، صفحهٔ ۱۱۷-۱۳۲

مقایسه روش آزمون ثبات کلی و مینیموم‌سازی نرم L_1 در شبکه‌های میکروژئودزی

سید شهرام جزائری جونقانی

کارشناسی ارشد عمران نقشه‌برداری- ژئودزی، شرکت ملی مناطق نفت‌خیز جنوب، اهواز، ایران

(دریافت: ۸۶/۴/۱۶ ، پذیرش نهایی: ۸۷/۴/۳)

چکیده

برای محاسبه جابه‌جایی در شبکه‌های میکروژئودزی کشف نقاط پایدار و ناپایدار از اهمیت بسیار زیادی برخوردار است، چرا که در این شبکه‌ها، کشف نادرست نقاط پایدار و ناپایدار به‌صورت نقص داده ظاهر می‌شود و جابه‌جایی‌های محاسبه شده را زیرسؤال می‌برد. به منظور کشف نقاط پایدار و ناپایدار عموماً از دو روش مهم زیر استفاده می‌شود:

الف- آزمون ثبات کلی درشبکه‌های میکروژئودزی

ب- مینیموم‌سازی نرم L_1 بردار جابه‌جایی

هدف این مقاله مقایسه دو روش فوق و بیان مزیت‌ها و معایب این دو روش نسبت به هم است که در ادامه شرح دو روش و نتایج حاصل از مقایسه آنها آورده شده است. نتایج نشان می‌دهد که به‌طور کلی، استفاده از روش مینیموم‌سازی نرم L_1 بردار جابه‌جایی در مقایسه با روش دیگر نتایج قابل قبولی دارد.

واژه‌های کلیدی: شبکه‌های میکروژئودزی، شبکه‌های ژئودتیک، نقص داده، روش آزمون ثبات کلی، روش مینیموم‌سازی نرم L_1، برآورد کمترین مربعات

Comparing congruency robust method and L_1 norm minimization in micro geodesy networks

Jazaeri Junghani, S. Sh.

Graduate student of Geodesy, National Iranian South Oil Company, Ahvaz, Iran

(Received: 7 Jul 2007 , Accepted: 23 Jun 2008)

Abstract

For calculation of the displacements of points in micro geodesy networks, it is essential to discover stable and unstable points. Without knowing stable points, calculated displacements are due to datum deficiency. In this case, calculated displacements are not valid. There are two methods to discover stable and unstable points:

a-Congruency robust method

b- L_1 Norm minimization

In this study the two mentioned methods are compared and the advantages and disadvantages of both are studied. For this reason, the two methods are programmed and several networks tested by them. The results of comparing these two methods appear below:

*نگارنده رابط: تلفن: ۰۹۱۲-۸۰۱۲۱۸۵ دورنگار: ۰۶۱۱-۲۲۶۳۲۴۶ E-mail: jazaeri.s@nisoc.ir

1- The two methods similarly detect all the points moved eighteen percent. L_1 norm minimization results are better than the congruency robust method by seventy four percent in detecting points moved. On the other hand, the congruency robust method detects moved points better than the other method by eight percent.

2- In the networks whose displacements of points are about a few millimeters, L_1 norm minimization detects moved points much better than the other method. Some of the samples are available in the tables below. These two methods discover all points when the displacements of moved points are a few centimeters and both methods are reliable. Thus, either L_1 norm minimization or congruency robust method can be used in order to detect moved points.

3- The congruency robust method is not reliable when all points or all points except one or two are moved because it cannot find all moved points in this situation. On the contrary, all points are detected by the L_1 norm minimization method. Neither the L_1 norm minimization nor the congruency robust method could find moved points when we have all points moved. Generally, if we have at least two unmoved points in the network, the results are reliable. In spit of this, deformation tensors should be applied.

4- The algorithm of L_1 norm minimization is simpler and its programming is easier than that of congruency robust method.

In order to discover moved and unmoved points in the network, the study suggests that the L_1 norm minimization method should be applied. Of course it is proposed that both methods be considered and the unmoved points obtained from them considered altogether as stable points. Moved points that are erroneously detected as unmoved points are discovered by a statistical test applied after calculating the displacements of unmoved points. These points are considered as unmoved points.

Key words: Micro geodesy networks, Geodetic networks, L_1 norm minimization, Congruency robust method, Deficiency datum, Least-squares estimation

۱ مقدمه

به شبکه‌های ژئودتیک در مفهوم عام شبکه‌های کنترل گفته می‌شود. این نوع شبکه‌ها به دو علت زیر ایجاد می‌شوند:

الف- ایجاد یک چارچوب مناسب از نقاط دارای مختصات برای پیاده کردن و کنترل در حین ساخت سازه‌های مهندسی مانند سدها، پل‌ها، و نصب قطعات صنعتی با دقت زیاد. در این شبکه‌ها مختصات نقاط نسبت به زمان ثابت است و با یک شبکه ایستا مواجه هستیم؛ بنابراین محاسبه مختصات نقاط این شبکه مورد توجه است.

ب- کاربرد دوم شبکه‌های کنترل ایجاد شبکه دارای مختصات برای محاسبه میزان جابه‌جایی یا تغییر شکلی است که در یک سازه اتفاق می‌افتد. یعنی مختصات نقاط در این شبکه‌ها به‌جای سه مؤلفه (x,y,z) دارای چهار مؤلفه (x,y,z,t) هستند و مختصات نقاط با گذر زمان عوض می‌شوند. این نوع شبکه‌ها که برای کشف جابه‌جایی به‌کار می‌روند، شبکه‌های کنترل جابه‌جایی و یا شبکه‌های میکروژئودزی نام دارند. برای محاسبه جابه‌جایی در این نوع شبکه‌ها، کشف نقاط پایدار و ناپایدار از اهمیت زیادی برخوردار است. بنابراین

مطابق با کاربردهای فوق، شبکه‌های کنترل به دو نوع تقسیم می‌شوند (گرافارند، ۱۹۷۴):

الف- شبکه‌های کنترل ژئودتیکی

ب- شبکه‌های کنترل جابه‌جایی

مشخصات کیفی دو شبکه بالا همپوشانی زیادی با یکدیگر دارند. لیکن شبکه‌های کنترل جابه‌جایی مجموعه مشخصات بیشتری دارند، چون در این نوع شبکه‌ها، هدف تعیین جابه‌جایی است و نه صرفاً تعیین مختصات و لازم است که دو مجموعه مختصات در دو اپک زمانی وجود داشته باشد تا بتوان به کمک آنها جابه‌جایی را محاسبه کرد. با استفاده از شبکه‌های کنترل جابه‌جایی تغییر شکل و جابه‌جایی در یک سازه فیزیکی که مختصات آن برحسب زمان تغییر می‌کند، محاسبه می‌شود. چرا که این تغییر شکل و جابه‌جایی ممکن است خطرناک باشد (مانند شکستن سد). بنابراین یکی از مهم‌ترین ابزارها و فنون محاسبه جابه‌جایی، استفاده از شبکه‌های کنترل جابه‌جایی است که با تعیین جابه‌جایی در چند نقطه گسسته، تغییر شکل سازه را بررسی می‌کنند. شبکه‌های کنترل جابه‌جایی خود به دو شکل زیرند (ونیچک و همکاران، ۱۹۹۰).

الف- شبکه‌های مطلق جابه‌جایی

ب- شبکه‌های نسبی جابه‌جایی

در شبکه‌های مطلق جابه‌جایی فرض بر این است که تعدادی از نقاط شبکه در یک فاصله زمانی پایدار مانده‌اند و با تشخیص این نقاط پایدار است که می‌توان میزان جابه‌جایی نقاط ناپایدار و یا نقاط موضوع را محاسبه کرد؛ چون جابه‌جایی مطلق نقاط ناپایدار یا موضوع، در شبکه‌های کنترل جابه‌جایی، نسبت به نقاط مرجع پایدار محاسبه می‌شود. در صورتی که این نقاط به درستی شناسایی نشوند جابه‌جایی‌های به‌دست آمده برای نقاط موضوع، تعبیر و تجزیه و تحلیل این جابه‌جایی‌ها اعتباری نخواهند داشت. وقتی راجع به مطلق بودن جابه‌جایی صحبت می‌شود باید نقاط مرجع پایدار دور از منطقه‌ای باشند که در آن منطقه جابه‌جایی نقاط محاسبه می‌شود؛ یعنی جابه‌جایی سازه اثری روی نقاط مرجع نداشته باشد. اگر این مورد اثبات شود جابه‌جایی مطلق نقاط حساب می‌شود. حتی نقاط مرجعی که دور از منطقه تغییر شکل‌پذیر انتخاب می‌شوند، ممکن است به واسطه نیروهای محلی جابه‌جا شوند. در اصل اطمینانی به ثبات نقاط مرجع نیست. در این صورت ضرورت یک روش کارا و مؤثر برای کشف نقاط پایدار و ناپایدار احساس می‌شود. متأسفانه این موضوع در بسیاری از طرح‌های مهندسی بررسی نمی‌شود. چون نقاط مرجع پایدار به‌خوبی تشخیص داده نمی‌شوند. جابه‌جایی‌های تعیین شده برای نقاط شبکه به واسطه جابه‌جایی دستگاه مختصات شبکه است و به واسطه جابه‌جایی واقعی این نقاط نیست و به این جابه‌جایی‌های محاسبه شده نمی‌توان اطمینان کرد. بنابراین در شبکه‌های مطلق جابه‌جایی با استفاده از نقاط پایدار، جابه‌جایی (displacement) نقاط محاسبه می‌شوند. در شبکه‌های نسبی مفهوم جابه‌جایی به دو صورت مطرح می‌شود. ابتدا می‌توان جابه‌جایی را نسبت به یک نقطه حساب کرد؛ یعنی یک یا چند نقطه را ثابت گرفت و همه جابه‌جایی‌ها را نسبت به آن محاسبه کرد که این نوع جابه‌جایی درست نیست، چون جابه‌جایی که برای نقاط محاسبه می‌شود ممکن است به واسطه جابه‌جایی همان نقاطی باشد که ثابت فرض شده‌اند. اگر نقطه‌ای که ثابت فرض شده است جابه‌جا نشده باشد، جابه‌جایی محاسبه شده برای بقیه نقاط جابه‌جایی مطلق است. اما اگر این نقطه جابه‌جا شده باشد جابه‌جایی‌های محاسبه شده نسبی هستند؛ یعنی به واسطه تغییر دستگاه مختصات شبکه اتفاق افتاده‌اند. بحث دیگر در جابه‌جایی نسبی، تغییر شکل در شبکه (deformation) است،که در این مورد وضعیت شبکه نسبت به حالت اولیه خود سنجیده می‌شود؛ یعنی مشخص می‌شود که شکل

شبکه چقدر تغییر کرده است و وضعیت نقاط نسبت به هم سنجیده می‌شود. در این مورد آنالیز استرین (strain) را به‌کار می‌برند یک روشی هندسی است و تغییر شکل به زبان هندسی تعبیر می‌کند (ونیچک و همکاران، ۱۹۹۰).

۲ سرشکنی شبکه‌های کنترل

در یک شبکه کنترل میکروژئودزی باید نقاط مرجع پایداری وجود داشته باشد تا بتوان به کمک آنها جابه‌جایی مطلق نقاط را حساب کرد. در شبکه‌ای که همهٔ نقاط آن جابه‌جا شده‌اند نمی‌توان جابه‌جایی مطلق نقاط را برآورد کرد، چرا که به علت نقص داده شبکه جابه‌جایی‌ها همواره اشتباه هستند. در ابتدا چون اطلاعاتی راجع به نقاط پایدار شبکه وجود ندارد بحث سرشکنی آزاد شبکه‌های کنترل مطرح می‌شود؛ یعنی به علت نبود مبدأ، توجیه و یا مقیاس نمی‌شود شبکه را اعمال کرد. برای سرشکنی آزاد شبکه می‌توان از مدل پارامتریک استفاده کرد که معادله آن به صورت زیر است (ونیچک و ولز، ۱۹۷۲).

$$\begin{aligned} & l+v=Ax, \\ & v^tPv\to \min, \\ & P=\sigma_0^2C_l^{-1}. \end{aligned} \qquad (۱)$$

که برای شبکه‌ای با n مشاهده و u مجهول $\mathbf{l}$ بردار مشاهدات با بعد n است، v بردار nبعدی باقی‌مانده هاست، A ماتریس $(n\times u)$ ضرایب، x بردار uبعدی مجهولات، P ماتریس $(n\times n)$ وزن مشاهدات و C_l ماتریس $(n\times n)$ واریانس وکوواریانس مشاهدات است. از روش کمترین مربعات بردار مجهولات، بردار باقی‌مانده‌ها و بردار مشاهدات سرشکن شده به صورت زیر برآورد می‌شوند (ونیچک و ولز، ۱۹۷۲).

$$\begin{aligned} & \hat{x}=N^{-1}u, \\ & \hat{v}=A\hat{x}-l, \\ & \hat{l}=A\hat{x}. \end{aligned} \qquad (۲)$$

که در آن، ماتریس معادلات نرمال $N=(A^tPA)$ و $u=(A^tpl)$ هستند. ماتریس کوواریانس مشاهدات $(C_{\hat{l}})$، مجهولات $(C_{\hat{x}})$ و باقی‌مانده‌ها $(C_{\hat{v}})$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند (ونیچک و ولز، ۱۹۷۲).

$$\begin{aligned} & C_{\hat{x}}=\sigma_0^2N^{-1}, \\ & C_{\hat{l}}=AC_{\hat{x}}A, \\ & C_{\hat{v}}=C_l-C_{\hat{l}}. \end{aligned} \qquad (۳)$$

در سرشکنی آزاد شبکه به علت نقصان داده شبکه ماتریس معادلات نرمال (N) یک ماتریس تکین خواهد بود؛ یعنی $\det(N)=0$ و بنابراین بایستی یک داده برای محاسبه بردار جواب $(\hat{x})$ و $(C_{\hat{x}})$تعریف شود (ونیچک و ولز، ۱۹۷۲).

$$\text{rank}(A)=\text{u-d}<u\to \text{rank}(N)=\text{u-d}. \qquad (۴)$$

که در آن d، نقص داده شبکه است. ماتریس (D) با خصوصیات زیر تعریف می‌شود (ونیچک و ولز، ۱۹۷۲).

$$.\text{rank}(D)=d\to \text{rank}\begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}=u-d+d=u \qquad (۵)$$

ماتریس D نقش کانسترینت مطلق را دارد که دستگاه مختصات شبکه را به صورت مینیموم تعریف می‌کند؛ یعنی $(Dx=0)$ و H ماتریسی است که زیرفضای سطرهایش مکمل متعامد زیرفضای سطرهای ماتریس ضرایب A است؛ یعنی (ونیچک و ولز، ۱۹۷۲).

$$\text{rank}\begin{pmatrix} A \\ H \end{pmatrix}=u \qquad (۶)$$

$AH^t = 0$ ،$HA^t = 0$ ،$NH^t = 0$ ،. $HN = 0$

H را فضای پوچی ماتریس A می‌نامند یعنی $H = null(A)$ و همان‌طور که دیدیم $rank(H) = rank(D)$.

با در نظر گرفتن D به مثابه ماتریس داده شبکه و H درحکم فضای پوچی ماتریس A، $\hat{x}$ و $C_{\hat{x}}$ به صورت زیر به‌دست می‌آید (امیری سیمکویی، ۱۹۹۸).

$$C_{\hat{x}} = (N + D^tD)^{-1} - H^t(HD^tDH^t)^{-1}H,$$
$$\hat{x} = C_{\hat{x}}A^tPl = (A^tPA + D^tD)^{-1}A^tPl. \tag{۷}$$

در مواقعی که به عللی $C_{\hat{x}}$ و $\hat{x}$ نزدیک به تکین می‌شوند به‌جای فرمول‌های شماره ۷ می‌توان از فرمول‌های زیر استفاده کرد که این مشکل را رفع می‌کنند (امیری سیمکویی، ۱۹۹۸).

$$C_{\hat{x}} = (N + kD^tD)^{-1} - H^t(HD^tDH^t)^{-1}k^{-1}H,$$
$$\hat{x} = (A^tPA + kD^tD)^{-1}A^tPl. \tag{۸}$$

که در آن k یک ضریب یا یک ماتریس غیر تکین است. اکنون با بیان چند مثال شکل ماتریس‌های D و H توضیح داده می‌شود. برای یک شبکه ارتفاعی که شامل m نقطه است، H برداری با عضوی واحد است. برای یک شبکه مسطحاتی که شامل m نقطه بوده و مبدأ، توجیه و مقیاس ندارد، H یک ماتریس $(4 \times 2m)$ به شکل زیر است (امیری سیمکویی، ۱۹۹۸).

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & . & . & . & 0 & 1 \\ y_1 & -x_1 & y_2 & -x_2 & . & . & . & y_m & -x_m \\ x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & . & . & . & x_m & y_m \end{bmatrix} \tag{۹}$$

که x_m و y_m مختصات نقاط هستند. موقع سرشکنی از مختصات تقریبی نقاط مجهول استفاده می‌شود و در مراحل بعدی مختصات بهبود یافته نقاط به‌کار می‌رود، یعنی

$$\hat{x}_i = x_i^0 + \Delta x_i,$$
$$\hat{y}_i = y_i^0 + \Delta y_i, \tag{۱۰}$$
$$i = 1, 2, ..., m.$$

سطر اول و دوم ما تریس H ناشی از نبود مبدأ و سطر سوم به علت نبود توجیه و سطر چهارم برای شبکه‌ای است که مقیاس ندارد. حال برای مثال اگر شبکه‌ای در نظر گرفته شود که در آن طول اندازه‌گیری شده باشد، سطر چهارم از ماتریس H حذف می‌شود. ماتریس H را می‌توان همچنین به صورت زیر تعریف کرد (امیری سیمکویی، ۱۹۹۸).

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & . & . & . & 0 & 1 \\ y_1^c & -x_1^c & y_2^c & -x_2^c & . & . & . & y_m^c & -x_m^c \\ x_1^c & y_1^c & x_2^c & y_2^c & . & . & . & x_m^c & y_m^c \end{bmatrix}. \tag{۱۱}$$

که در آن x_i^c و y_i^c مؤلفه‌های مختصات نقاط نسبت به مرکز گرانی شبکه است، یعنی

$$x_i^c = x_i - \left[\sum_{k=1}^{m} x_k\right] \Big/ m,$$
$$y_i^c = y_i - \left[\sum_{k=1}^{m} y_k\right] \Big/ m, \tag{۱۲}$$
$$i = 1, 2, ..., m.$$

۳ فاکتور واریانس ثانویه $(\hat{\sigma}_0^2)$

مورد استفاده (σ_0^2) این است که به هر مشاهده‌ای وزن مشخصی نسبت می‌دهد و استفاده‌های دیگر آن بعد از سرشکنی است برای (σ_0^2) دو حالت معلوم و مجهول وجود دارد. موقعی که گفته می‌شود (σ_0^2) معلوم است

یعنی مقیاس ماتریس واریانس و کوواریانس مشاهدات معلوم است و وقتی که گفته می‌شود (σ_0^2) مجهول است یعنی مقیاس ماتریس واریانس و کوواریانس مشاهدات مجهول است. هرگاه (σ_0^2) نامعلوم باشد می‌توان بعد از سرشکنی مقدار آن را به صورت زیر برآورد کرد (باردا، ۱۹۶۸).

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{(\hat{v}^t P \hat{v})}{df} \tag{۱۳}$$

که در آن df درجه آزادی مشاهدات است، یعنی

$$df = n - \text{rank}(A) = n - u + d \tag{۱۴}$$

اگر (σ_0^2) معلوم باشد از آزمون صورت کووادراتیک باقی‌مانده‌ها (آزمون فاکتور واریانس اولیه) به‌صورت زیر استفاده می‌شود (باردا، ۱۹۶۸).

$$\left(\frac{df\hat{\sigma}_0^2)}{\chi^2_{df,\alpha/2}}\right) < \sigma_0^2 < \left(\frac{df\hat{\sigma}_0^2}{\chi^2_{df,(1-\alpha/2)}}\right). \tag{۱۵}$$

که در آن $\chi^2_{df,\alpha/2}$ و $\chi^2_{df,(1-\alpha/2)}$ متغیرهای توزیع خی دو برای احتمال $\alpha/2$ و $1-\alpha/2$ است. علل متفاوتی برای رد آزمون فوق وجود دارد که از جمله آنها می‌توان به اشتباه در محاسبات، وجود مشاهدات اشتباه، وجود خطای قاعده‌مند، ضعف مدل ریاضی، توزیع غیر نرمال مشاهدات، خطای فاحش در مختصات اولیه، تأثیر مشتقات مرتبه دوم به بالا، مقیاس ناصحیح ماتریس واریانس وکوواریانس و در نهایت معرفی نادرست وزن نسبی مشاهدات اشاره کرد.

۴ تبدیل همانندی (similarity transformation)

در صورتی که یک بردار جواب مانند $\delta\hat{x}_1$ در دستگاه مختصات D_1 وجود داشته باشد می‌توان این بردار جواب را در دستگاه مختصات D_2 به‌دست آورد. برای نیل به این هدف تبدیل تشابه S به‌صورت زیر تعریف می‌شود (باردا، ۱۹۷۳).

$$S = I - H^t(D_2H^t)^{-1}D_2. \tag{۱۶}$$

بردار جواب $\delta\hat{x}_2$ در دستگاه مختصات دوم به صورت زیر محاسبه می‌شود (باردا، ۱۹۷۳).

$$\delta\hat{x}_2 = S\delta\hat{x}_1. \tag{۱۷}$$

همچنین می‌توان ماتریس کوواریانس مجهولات را در دستگاه مختصات D_2 به صورت زیر محاسبه کرد (باردا، ۱۹۷۳).

$$C_{\hat{x}_2} = SC_{\hat{x}_1}S^t. \tag{۱۸}$$

ماتریس دستگاه مختصات D_2 ممکن است به‌صورت زیر قابل محاسبه باشد:

$$D_2 = HW. \tag{۱۹}$$

که در آن W ماتریس وزن دستگاه مختصات شبکه، یک ماتریس قطری است. این ماتریس نقش هر نقطه را در دستگاه مختصات شبکه بیان می‌کند. اگر $W = I$ تعریف شود D_2 به دستگاه مختصات مقیدهای داخلی تبدیل خواهد شد. اگر فقط از تعدادی از نقاط در تعریف داده شبکه استفاده شود به این نقاط وزن یک و به سایر نقاط وزن صفر تعلق می‌گیرد، یعنی $W = \text{diag}(I, 0)$. لازم به ذکر است که تبدیل تشابه S نه فقط برای تبدیل مختصات و ماتریس‌های کوواریانس به‌کار می‌رود بلکه برای تبدیل بردار جابه‌جایی نیز استفاده می‌شود که در ادامه بحث به این مطلب اشاره خواهد شد.

۵ آزمون پایداری نقاط شبکه

فرض کنید که شبکه دردو اپک با استفاده از مقیدهای داخلی سرشکن شده است و موارد زیر به‌دست آمده‌اند:

$(\hat{x}_1, C_{\hat{x}_1}, \hat{\sigma}^2_{01}, df_1)$ و $(\hat{x}_2, C_{\hat{x}2}, \hat{\sigma}^2_{02}, df_2)$

که در آن $\hat{x}_1$ و $\hat{x}_2$ به ترتیب مختصات سرشکن شده

اپک اول و دوم، $C_{\hat{x}1}$ و $C_{\hat{x}2}$ به ترتیب ماتریس واریانس و کوواریانس مختصات سرشکن شده اپک اول و دوم، $\hat{\sigma}_{01}^2$ و $\hat{\sigma}_{02}^2$ به ترتیب فاکتور واریانس ثانویه اپک اول و دوم و df_1 و df_2 به ترتیب درجات آزادی اپک اول و دوم‌اند.

فاکتور واریانس جمعی $\hat{\sigma}_0^2$ ودرجه آزادی df کل شبکه به صورت زیر تعریف می‌شوند (باردا، ۱۹۶۷).

$$df = df_1 + df_2, \qquad (۲۰)$$
$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{(df_1\hat{\sigma}_{01}^2 + df_2\hat{\sigma}_{02}^2)}{(df_1 + df_2)}.$$

بردار جابه‌جایی ظاهری به همراه ماتریس واریانس و کوواریانس آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{d} = \hat{x}_2 - \hat{x}_1, \qquad (۲۱)$$
$$C_{\hat{d}} = C_{\hat{x}1} + C_{\hat{x}2}.$$

همان‌طورکه قبلاً نیز ذکر شد، جابه‌جایی به‌دست آمده در بالا ممکن است به واسطه داده انتخابی شبکه یا به‌خاطر استفاده از داده‌های متفاوت در دو مرحله سرشکنی باشد. پس برای به‌دست آوردن جابه‌جایی صحیح ابتدا باید نقاط پایدار و ناپایدار شناسایی شوند. در هر اپک بعد از سرشکنی، $\hat{\sigma}_{01}^2$ و $\hat{\sigma}_{02}^2$ باید آزمون شوند. همچنین آماره‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود تا نسبت این دو فاکتور نیز آزمون شود (باردا، ۱۹۶۷).

$$\frac{\hat{\sigma}_{01}^2}{\hat{\sigma}_{02}^2} \approx F_{df1,df2}. \qquad (۲۲)$$

که باید شرط زیر در آن برقرار باشد (باردا، ۱۹۶۷).

$$\frac{\hat{\sigma}_{01}^2}{\hat{\sigma}_{02}^2} < F_{df1,df2,\alpha}. \qquad (۲۳)$$

که در آن $F_{df1,df2,\alpha}$ متغیر توزیع فیشر با درجه آزادی df_2 و df_2 و در سطح اطمینان $1-\alpha$ است. همچنین ممکن است از فاصله اطمینان دو دامنه زیر استفاده شود (باردا، ۱۹۶۷).

$$F_{df1,df2,1-\alpha/2} < \frac{\hat{\sigma}_{01}^2}{\hat{\sigma}_{02}^2} < F_{df1,df2,\alpha/2}. \qquad (۲۴)$$

رد فرض فوق ممکن است به واسطه سازگار نبودن وزن مشاهدات در دو مرحله سرشکنی و یا به علت معرفی نا صحیح وزن مشاهدات باشد. آماره w به صورت زیر تعریف می‌شود (باردا، ۱۹۶۷).

$$w = \frac{\hat{d}^t C^+_{\hat{d}}\hat{d}}{h\hat{\sigma}_0^2} \approx F_{h,df} \qquad (۲۵)$$
$$h = \mathrm{rank}(C_{\hat{d}}).$$

اگر $w < F_{h,df,\alpha}$ آن‌گاه $E(\hat{d}) = 0$ یعنی جابه‌جایی معنادار نیست اما اگر $w > F_{h,df,\alpha}$ آنگاه $E(\hat{d}) \neq 0$ یعنی در شبکه جابه‌جایی اتفاق افتاده است و جابه‌جایی معنادار است. اگر در شبکه‌ای جابه‌جایی معنادار بود با استفاده از دو روش آزمون ثبات کلی ویا مینیموم‌سازی نرم L_1 بردار جابه‌جایی ابتدا نقاط مرجع پایدار، تشخیص داده می‌شوند و سپس مقدار جابه‌جایی‌ها محاسبه می‌شوند.

۶ روش آزمون ثبات کلی در شبکه

بعد از سرشکنی دو اپک و به‌دست آوردن بردار جابه‌جایی $\hat{d}$، سهم نقاط در آماره w محاسبه می‌شوند سهم نقطه i، به صورت زیر حساب می‌شود (باردا، ۱۹۷۳).

$$\hat{d} = \begin{bmatrix} \hat{d}_r \\ \hat{d}_i \end{bmatrix} \qquad (۲۶)$$

اگر m تعداد نقاط باشد، آنگاه تعداد مجهولات $(u = 2m)$، بردار جابه‌جایی $\hat{d}_r$، $(u-2)$ بعدی و بردارجابه‌جایی نقطه i، یعنی $\hat{d}_i$، دوبعدی خواهد بود. نمادی که در اینجا استفاده شده است نشان می‌دهد که سهم نقطه آخر حساب شده است. سهم نقطه i به صورت

زیر محاسبه می‌شود (باردا، ۱۹۷۳).

$$w_i = \hat{d}_i^t (C_{\hat{d}_i})^{-1} \hat{d}_i. \qquad (۲۷)$$

که در آن $C_{\hat{d}_i}$ ماتریس واریانس و کوواریانس نقطه i، است. وقتی سهم همهٔ نقاط محاسبه شد یکی از این wها از همه بیشتر است؛ فرض کنید سهم نقطه j یعنی (w_j)، از همه بیشتر باشد، پس اولین نقطه‌ای که در شبکه جابه‌جا شده است نقطه j است. سهم نقطه j، با صفر گذاشتن دو ستون مربوط به x و y نقطه j از ماتریس داده حذف می‌شود و داده جدید به صورت زیر تشکیل می‌شود (باردا، ۱۹۷۳).

$$\mathbf{D}_i^{m-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} & & & & & x_j & y_j & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ y_1 & -x_1 & y_2 & -x_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & y_m & -x_m \\ x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & x_m & y_m \end{bmatrix} \end{array} \qquad (۲۸)$$

با استفاده از تبدیل همانندی S بردار جابه‌جایی و ماتریس کوواریانس مربوطه به داده پیش‌گفته تبدیل می‌شود (باردا، ۱۹۷۳).

$$\begin{aligned} \hat{d}_s &= S \times \hat{d}, \\ C_{\hat{d}_s} &= S \times C_{\hat{d}} \times S^t. \end{aligned} \qquad (۲۹)$$

که در آن $\hat{d}_s$ و $C_{\hat{d}_s}$ به ترتیب بردار جابه‌جایی و ماتریس کوواریانس تبدیل یافته‌اند و S ماتریس تبدیل تشابه است که از معادله (۱۶) به‌دست می‌آید و $H = D_i$ و $D_2 = D_i^{m-1}$.

مختصاتی که در ماتریس‌های D و H وجود دارند می‌توانند مختصات میانگین اپک اول و دوم و یا اپک اول و یا اپک دوم باشند. $\hat{d}_s$ به جابه‌جایی واقعی شبکه نزدیک‌تر است و جابه‌جایی نقطه j، در $\hat{d}_s$ بیشتر نمایان می‌شود.

مرحله بعد حذف d_j، از $\hat{d}_s$ است یعنی:

$$\hat{d}_s = \begin{bmatrix} d_r \\ d_j \end{bmatrix} \qquad (۳۰)$$

و همچنین حذف p_j از $p_{\hat{d}}$ است یعنی:

$$p_{\hat{d}} = \begin{bmatrix} p_r & p_{rj} \\ p_{jr} & p_j \end{bmatrix} \qquad (۳۱)$$

که در آن $p_{\hat{d}}$ ماتریس وزن بردار جابه‌جایی $\hat{d}$ و یا به‌عبارت دیگر معکوس ماتریس کوواریانس بردار جابه‌جایی $(C_{\hat{d}})$ است. p_j ماتریس وزن مربوط به نقطه $j\ (\hat{d}_j)$ و p_r ماتریس وزن $\hat{d}_r$ است.

و ماتریس $C_{\hat{d}}$ جدید به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$C_{\hat{d}} = P_{\hat{d}}^{+}. \qquad (۳۲)$$

که در آن $C_{\hat{d}}$ شبه معکوس $P_{\hat{d}}$ است. با به‌دست آوردن $\hat{d}_s$، $C_{\hat{d}}$ و $P_{\hat{d}}$ دوباره آماره w بررسی می‌شود که آیا نقاط جابه‌جا شده دیگری وجود دارد یا خیر. اگر آماره w رد شود به این معنا است که دوباره نقاط ناپایدار دیگری وجود دارند و مراحل توضیح داده شده در بالا از نو تکرار می‌شود تا اینکه آماره w پذیرفته شود و نقاط ناپایدار دیگری وجود نداشته باشد. مراحلی که توضیح داده شد مربوط به شبکه‌های مسطحاتی است. برای شبکه‌های مسطحاتی و ارتفاعی همین مراحل تکرار می‌شود با این تفاوت که در حذف کردن، به‌جای دو سطر و دو ستون، سه سطرو سه ستون حذف می‌شود.

۷ روش مینیموم‌سازی نرم L_1 بردار جابه‌جایی

در اینجا این بحث مطرح می‌شود که باید دستگاه مختصاتی را انتخاب کنیم که طول بردار جابه‌جایی در آن مینیموم شود. از آنجا که مختصات کمیت‌هایی وابسته به داده هستند، پس جابه‌جایی‌ها نیز وابسته به داده

خواهد بود. در یکی از این دستگاه‌های مختصات نرم L_1 بردار جابه‌جایی کمترین مقدار است. چنین دستگاه مختصاتی، دستگاه مختصات پایدار نامیده می‌شود. اگر نقاط مرجع پایدار به مثابه داده در نظرگرفته شوند، جابه‌جایی که برای نقاط شبکه به‌دست می‌آید نسبت به بقیه داده‌ها کمترین مقدار را دارد. چون نقاطی که ثابت هستند جابه‌جایی ندارند و نقاطی که جابه‌جا شده‌اند جابه‌جایی‌شان نسبت به این نقاط محاسبه می‌شود، جابه‌جایی‌ها کمترین مقدار خود را خواهند داشت و نرم L_1 بردار جابه‌جایی مینیموم خواهد شد. علت استفاده از نرم L_1 این است که جابه‌جایی واقعی نقاط را بهتر نشان می‌دهد و حساسیت بیشتری دارد. دوباره فرض کنید که مختصات سرشکن شده دو اپک در دست است و $\hat{d}$ به‌دست آمده است این $\hat{d}$ به دستگاه‌های مختصات گوناگونی تبدیل می‌شود تا دیده شود که جابه‌جایی در کدام دستگاه مختصات مینیموم می‌شود (باردا، ۱۹۷۳).

$$\|d\|_{l1} = \sum_{i=1}^{u} |d(i)| \rightarrow \min. \qquad (۳۳)$$

$$\begin{aligned} \hat{d}_s &= S\hat{d}, \\ S &= I - H^t(DH^t)^{-1}D. \end{aligned} \qquad (۳۴)$$

$$\begin{aligned} H &= D_i, \\ D &= HW. \end{aligned} \qquad (۳۵)$$

که در آن W، ماتریس وزن دستگاه مختصات شبکه است. با جاگذاری D در S موارد زیر حاصل می‌شود (باردا، ۱۹۷۳).

$$\begin{aligned} S &= I - H^t(HWH^t)^{-1}HW, \\ \hat{d}_s &= (I - H^t(HWH^t)^{-1}HW)\hat{d} \\ &= \hat{d} - H^t(HWH^t)^{-1}HW\hat{d}, \\ t &= (HWH^t)^{-1}HW\hat{d}, \\ \hat{d}_s &= \hat{d} - H^tT. \end{aligned} \qquad (۳۶)$$

هدف به‌دست آوردن W ای است که نرم L_1، $\hat{d}_s$ را مینیموم کند.

$$\|\hat{d}_s\|_{l1} = \sum_{i=1}^{u} |\hat{d}_s(i)| = \sum_{i=1}^{u} |\hat{d}(i) - h^t{}_i \times t| \rightarrow \min. \qquad (۳۷)$$

که در آن $\hat{d}(i)$، عضو iام بردار $\hat{d}$ و h_i سطر iام ماتریس H است. مسئله فوق ممکن است همیشه جواب منحصر به‌فردی نداشته باشد. اما این امر در مورد یافتن نقاط مرجع پایدار، مشکلی ایجاد نمی‌کند. در مورد شبکه‌های مسطحاتی، روش تکراری تبدیل تشابه وزن دار استفاده می‌شود (باردا، ۱۹۷۳).

$$\begin{aligned} S &= I - H^t(HWH^t)^{-1}HW, \\ W^{(1)} &= I, \\ \hat{d}_s^{(1)} &= S^{(1)}\hat{d}. \end{aligned} \qquad (۳۸)$$

برای ساختن $W^{(i)}$ به‌جای عضو قطری $W^{(i-1)}$ از $\frac{1}{|\hat{d}_s^{(i-1)}(i)| + \varepsilon}$ استفاده می‌شود. چون در بعضی از مواقع $\hat{d}_s(i)$ ممکن است صفر شود $|\hat{d}_s(i)|$ با یک عدد کوچک مانند ε جمع می‌شود، یعنی

$$W^{(i)} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{|\hat{d}_s^{(i-1)}(i)| + \varepsilon}\right). \qquad (۳۹)$$

نقطه‌ای که جابه‌جایی بیشتری دارد، وزن کمتری پیدا می‌کند ودر مراحل بعدی، جابه‌جایی‌اش بیشتر است. تبدیل تشابه S روی هر کدام از $\hat{d}_s^{(i)}$ هاویا $\hat{d}$ اولیه اعمال شود تفاوتی ندارد، چون $S_iS_kS_j = S_i$ یعنی تبدیل تشابه S تبدیلی خود توان است. بنابراین داریم (باردا، ۱۹۷۳).

$$\begin{aligned} S^i &= I - H^t(HW^iH^t)^{-1}HW^i, \\ d_s^{(i)} &= S^{(i)}\hat{d}. \end{aligned} \qquad (۴۰)$$

و محاسبات تا جایی ادامه پیدا می‌کند که $\hat{d}_s^{(i)}$ به یک بردار واحد همگرا شود که تفاوت کمی با بردار جابه‌جایی واقعی پیدا می‌کند، یعنی

$$\left|\hat{d}_s^{(i)} - \hat{d}_s^{(i-1)}\right| < \delta. \tag{۴۱}$$

که δ می‌تواند نصف دقت متوسط مؤلفه‌های جابه‌جایی باشد. فرض کنید در مرحله m بردار $\hat{d}_s$ به یک بردار واحد همگرا شده باشد در نتیجه داریم (باردا، ۱۹۷۳).

$$\hat{d}_s^{(m)} = S^{(m)}\hat{d}.$$

$$C_{\hat{d}_s}^{(m)} = S^{(m)}C_{\hat{d}}S^{t(m)}.$$

$$\hat{d}_s^{(m)} = \begin{pmatrix} \hat{d}_1 \\ \hat{d}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{d}_m \end{pmatrix} \tag{۴۲}$$

$$C_{\hat{d}_s}^{(m)} = \begin{pmatrix} c_{\hat{d}1} & & & & & \\ & c_{\hat{d}2} & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & c_{\hat{d}m} \end{pmatrix}$$

در رابطه فوق $c_{\hat{d}i}$ زیر ماتریس‌های کوواریانس جابه‌جایی نقاط شبکه‌اند. حال آزمونی برای کشف نقاط پایدار و ناپایدار به‌صورت زیر صورت می‌گیرد (باردا، ۱۹۶۷).

$$F_i = \frac{d_i^t C_{d_i}^{-1} d_i}{c\hat{\sigma}_0^2} \approx F_{c,df}. \tag{۴۳}$$

که در آن c، بعد شبکه است. چون شبکه مورد بحث شبکه مسطحاتی است پس $c = 2$ است. برای همهٔ نقاط شبکه آزمون شماره ۴۳ صورت می‌گیرد که اگر $F_i > F_{c,df,\alpha}$ باشد نقطه جابه‌جا شده است، در غیر این صورت نقطه پایدار است. برای محاسبه جابه‌جایی نقاط جابه‌جا شده به‌جای نقاط پایدار ۱ و به‌جای بقیه نقاط 0 گذاشته می‌شود و جابه‌جایی محاسبه می‌شود.

۸ مقایسه دو روش با استفاده از نتایج عددی

برای مقایسه دو روش مینیموم‌سازی نرم L_1 بردار جابه‌جایی و آزمون ثبات کلی در شبکه، برنامه‌ای نوشته شد و شبکه‌های متفاوتی با این برنامه مورد بررسی قرار گرفت. بعضی از نقاط این شبکه‌ها به صورت اختیاری جابه‌جا شد و مشاهداتی شبیه‌سازی شده (طول، زاویه، طول و زاویه) برای این شبکه‌ها قبل و بعد از جابه‌جایی تصنعی نقاط، ایجاد شد. چون نقاط جابه‌جا شده از قبل معلوم بودند، دو روش پیش‌گفته از نظر تعداد کشف نقاط پایدار و ناپایدار مقایسه شدند. اما چون مشاهدات شبیه‌سازی بودند برای اینکه برنامه به مشاهدات بستگی نداشته باشد، برای هر شبکه صد بار برنامه تکرار شد که بخشی از نتایج را در زیر مشاهده خواهید کرد:

شبکه‌ای با نوع مشاهدات طول و دقت مشاهدات (mm) ۱/۷ و ۱۰ نقطه انتخاب شد که مختصات x و y نقاط شبکه قبل از جابه‌جایی عبارت است از:

$$x = \begin{bmatrix} 1000 \\ 1040 \\ 1040 \\ 1000 \\ 1005 \\ 1035 \\ 1058 \\ 1035 \\ 1005 \\ 982 \end{bmatrix} \text{ و } y = \begin{bmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1030 \\ 1030 \\ 985 \\ 985 \\ 1014 \\ 1045 \\ 1045 \\ 1016 \end{bmatrix}$$

جدول ۱. مقایسه دو روش آزمون ثبات کلی و مینیموم‌سازی نرم L_1 بردار جابه‌جایی.

مینیموم‌سازی نرم L_1 بردار جابه‌جایی	آزمون ثبات کلی	نام روش
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	نقاط جابه‌جا شده شبکه
$\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\-7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\-7\end{bmatrix}$	جابه‌جایی d_x و d_y نقاط جابه‌جا شده شبکه برحسب میلی‌متر
100%, 95%, 100%, 100%, 100%, 100% , 100%, 93%	100%, 96%, 11%, 100%, 25%, 12%, 100%, 44%	درصد کشف هر نقطه جابه‌جا شده در شبکه
100%	100%	ماکزیموم درصد کشف نقاط جابه‌جا شده در شبکه
93%	11%	مینیموم درصد کشف نقاط جابه‌جا شده در شبکه
98.5%	61%	میانگین درصد کشف نقاط جابه‌جا شده در شبکه
88%	0%	درصد کشف همهٔ نقاط جابه‌جا شده در شبکه

در جدول بالا نقاطی که جابه‌جا شده‌اند و جابه‌جایی این نقاط نشان داده شده است و چون برنامه برای شبکه ۱۰۰ بار تکرار شده است، درصد کشف هر نقطه جابه‌جا شده، درصد نقطه‌ای که با ماکزیموم درصد درحکم نقطه جابه‌جا شده تشخیص داده شده است، درصد نقطه‌ای که با مینیموم درصد به مثابه نقطه جابه‌جا شده تشخیص داده شده است، میانگین درصد کشف نقاط جابه‌جا شده و درصد حالاتی که همهٔ نقاط جابه‌جا شده درحکم نقاط ناپایدار تشخیص داده شده‌اند، آورده شده است.

جدول ۲. مقایسه دو روش آزمون ثبات کلی و مینیموم‌سازی نرم L_1 بردار جابه‌جایی.

مینیموم‌سازی نرم L_1 بردار جابه‌جایی	آزمون ثبات کلی	نام روش
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	نقاط جابه‌جا شده شبکه
$\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5\\4\end{bmatrix}$	جابه‌جایی d_x و d_y نقاط جابه‌جا شده شبکه برحسب میلی‌متر
100%, 100%, 100%, 100%, 100%, 100%, 100%	100%, 99%, 55%, 100%, 50%, 56%, 100%	درصد کشف هر نقطه جابه‌جا شده در شبکه
100%	100%	ماکزیموم درصد کشف نقاط جابه‌جا شده در شبکه
100%	50%	مینیموم درصد کشف نقاط جابه‌جا شده در شبکه
100%	80%	میانگین درصد کشف نقاط جابه‌جا شده در شبکه
100%	45%	درصد کشف همهٔ نقاط جابه‌جا شده در شبکه

در جدول زیر نقاط جدیدی جابه‌جا شده‌اند که نتایج را مشاهده می‌کنید.

جدول ۳. مقایسه دو روش آزمون ثبات کلی و مینیموم‌سازی نرم L_1 بردار جابه‌جایی.

نام روش	آزمون ثبات کلی	مینیموم‌سازی نرم L_1 بردار جابه‌جایی
نقاط جابه‌جا شده شبکه	**1, 2, 3, 4, 10**	**1, 2, 3, 4, 10**
جابه‌جایی d_x و d_y نقاط جابه‌جا شده شبکه برحسب میلی‌متر	$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$
درصد کشف هر نقطه جابه‌جا شده در شبکه	**76%, 46%, 79%, 91%, 39%**	**98%, 86%, 99%, 97%, 43%**
ماکزیموم درصد کشف نقاط جابه‌جا شده در شبکه	**91%**	**99%**
مینیموم درصد کشف نقاط جابه‌جا شده در شبکه	**39%**	**43%**
میانگین درصد کشف نقاط جابه‌جا شده در شبکه	**66.2%**	**84.6%**
درصد کشف همهٔ نقاط جابه‌جا شده در شبکه	**5%**	**35%**

جدول ٤. مقایسه دو روش آزمون ثبات کلی و مینیموم‌سازی نرم L_1 بردار جابه‌جایی.

نام روش	آزمون ثبات کلی	مینیموم‌سازی نرم L_1 بردار جابه‌جایی
نقاط جابه‌جا شده شبکه	**1, 2, 3, 4, 10**	**1, 2, 3, 4, 10**
جابه‌جایی d_x و d_y نقاط جابه‌جا شده شبکه برحسب میلی‌متر	$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$
درصد کشف هر نقطه جابه‌جا شده در شبکه	**7%, 100%, 100%, 63%, 100%**	**14%, 100%, 100%, 73%, 100%**
ماکزیموم درصد کشف نقاط جابه‌جا شده در شبکه	**100%**	**100%**
مینیموم درصد کشف نقاط جابه‌جا شده در شبکه	**7%**	**14%**
میانگین درصد کشف نقاط جابه‌جا شده در شبکه	**74%**	**77.4%**
درصد کشف همهٔ نقاط جابه‌جا شده در شبکه	**7%**	**14%**

جدول ۵. مقایسه دو روش آزمون ثبات کلی و مینیموم‌سازی نرم L_1 بردار جابه‌جایی.

نام روش	آزمون ثبات کلی	مینیموم‌سازی نرم L_1 بردار جابه‌جایی
نقاط جابه‌جا شده شبکه	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	1, 2, 3,4 ,5 ,6 ,7 ,8 ,9
جابه‌جایی d_x و d_y نقاط جابه‌جا شده شبکه برحسب میلی‌متر	$\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\-7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-6\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\-7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-6\\6\end{bmatrix}$
درصد کشف هر نقطه جابه‌جا شده در شبکه	100%, 96%, 8%, 100%, 23%, 11%, 100%, 44%, 100%	100%, 99%, 100%, 100%, 100%, 100%, 100%, 86%,100%
ماکزیموم درصد کشف نقاط جابه‌جا شده در شبکه	100%	100%
مینیموم درصد کشف نقاط جابه‌جا شده در شبکه	8%	86%
میانگین درصد کشف نقاط جابه‌جا شده در شبکه	60.25%	98.125%
درصد کشف همهٔ نقاط جابه‌جا شده در شبکه	0%	85%

جدول ٦. مقایسه دو روش آزمون ثبات کلی و مینیموم‌سازی نرم L_1 بردار جابه‌جایی.

نام روش	آزمون ثبات کلی	مینیموم‌سازی نرم L_1 بردار جابه‌جایی
نقاط جابه‌جا شده شبکه	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
جابه‌جایی d_x و d_y نقاط جابه‌جا شده شبکه برحسب میلی‌متر	$\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\-7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-6\\6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-7\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\-7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-6\\6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-7\\6\end{bmatrix}$
درصد کشف هر نقطه جابه‌جا شده در شبکه	100%, 92%, 25%, 90%, 42%, 24%, 88%, 51%, 88%, 89%	100%, 65%, 100%, 100%, 100%, 100%, 100%, 99%, 100%, 100%
ماکزیموم درصد کشف نقاط جابه‌جا شده در شبکه	100%	100%
مینیموم درصد کشف نقاط جابه‌جا شده در شبکه	24%	65%
میانگین درصد کشف نقاط جابه‌جا شده در شبکه	68.9%	96.4%
درصد کشف همهٔ نقاط جابه‌جا شده در شبکه	1%	64%

جدول ۷. مقایسه دو روش آزمون ثبات کلی و مینیموم‌سازی نرم L_1 بردار جابه‌جایی.

مینیموم‌سازی نرم L_1 بردار جابه‌جایی	آزمون ثبات کلی	نام روش
1, 2, 3, 4, 5, 6	**1, 2, 3, 4, 5, 6**	نقاط جابه‌جا شده شبکه
$\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-6\end{bmatrix}$	جابه‌جایی d_x و d_y نقاط جابه‌جا شده شبکه برحسب
100%, 100%, 100%, 100%, 100%, 100%	**100%, 100%, 98%, 100%, 95%, 98%**	درصد کشف هر نقطه جابه‌جا شده در شبکه
100%	**100%**	ماکزیموم درصد کشف نقاط جابه‌جا شده در شبکه
100%	**95%**	مینیموم درصد کشف نقاط جابه‌جا شده در شبکه
100%	**98.5%**	میانگین درصد کشف نقاط جابه‌جا شده در شبکه
100%	**95%**	درصد کشف همهٔ نقاط جابه‌جا شده در شبکه

جدول ۸. مقایسه دو روش آزمون ثبات کلی و مینیموم‌سازی نرم L_1 بردار جابه‌جایی.

مینیموم‌سازی نرم L_1 بردار جابه‌جایی	آزمون ثبات کلی	نام روش
1, 2, 3, 4, 5	**1, 2, 3, 4, 5**	نقاط جابه‌جا شده شبکه
$\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\-5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\-5\end{bmatrix}$	جابه‌جایی d_x و d_y نقاط جابه‌جا شده شبکه برحسب میلی‌متر
100%, 100%, 100%, 100%, 100%	**100%, 100%, 100%, 100%, 100%**	درصد کشف هر نقطه جابه‌جا شده در شبکه
100%	**100%**	ماکزیمم درصد کشف نقاط جابه‌جا شده در شبکه
100%	**100%**	مینیموم درصد کشف نقاط جابه‌جا شده در شبکه
100%	**100%**	میانگین درصد کشف نقاط جابه‌جا شده در شبکه
100%	**100%**	درصد کشف همهٔ نقاط جابه‌جا شده

جدول ۹. مقایسه کلی دو روش آزمون ثبات کلی و مینیموم‌سازی نرم L_1 بردار جابه‌جایی.

نام روش	آزمون ثبات کلی	مینیموم‌سازی نرم L_1 بردار جابه‌جایی
میانگین ماکزیموم درصد کشف نقاط جابه‌جا شده در شبکه	91.476%	99.461%
میانگین مینیموم درصد کشف نقاط جابه‌جا شده در شبکه	58.878%	84.607%
میانگین میانگین درصد کشف نقاط جابه‌جا شده در شبکه	66.588%	95.529%
میانگین درصد کشف همهٔ نقاط جابه‌جا شده در شبکه	44.026%	90.027%

در همهٔ شبکه‌های آزمون شده با نقاط، مشاهدات متفاوت و با جابه‌جایی‌های متفاوت میانگین همهٔ رقم‌ها محاسبه شد که نتایج را در جدول بالا مشاهده می‌کنید. همان‌طور که در همهٔ موارد روش مینیموم‌سازی نرم L_1 بردار جابه‌جایی نسبت به روش آزمون ثبات کلی نتایج بهتری ارائه می‌دهد.

۹ نتیجه‌گیری و پیشنهادات

با مقایسه نتایج به‌دست آمده از دو روش، موارد زیر نتیجه‌گیری می‌شود:

۱- با مقایسه نتایج به‌دست آمده حاصل از دو روش (آزمون ثبات کلی و مینیموم‌سازی نرم L_1 بردار جابه‌جایی) روی شبکه‌های گوناگون از لحاظ درصد کشف همهٔ نقاط جابه‌جا شده در شبکه، در ۱۸٪ موارد هر دو روش جواب یکسان دادند، در ۷۴٪ موارد روش مینیموم‌سازی نرم L_1 نسبت به روش آزمون ثبات کلی نتایج بهتری به‌دست می‌دهد و در ۸٪ موارد روش آزمون ثبات کلی نسبت به روش مینیموم‌سازی نرم L_1 بردار جابه‌جایی نتیجه بهتری می‌دهد. همان‌طور که در قسمت قبل نیز ذکر شد روش مینیموم‌سازی نرم L_1 به‌طور کلی نتایج مناسب‌تری را نسبت به روش آزمون ثبات کلی به‌دست می‌دهد.

۲- در شبکه‌هایی که جابه‌جایی نقاط جابه‌جا شده آنها کم بود، دیده شد که روش مینیموم‌سازی نرم L_1 بردار جابه‌جایی از روش آزمون ثبات کلی بسیار بهتر است و در بعضی موارد تفاوت این دو روش بسیار زیاد است که تعدادی از این موارد در جدول‌ها آورده شده است. اما در مواردی که جابه‌جایی‌ها مقدار قابل توجهی داشتند، در اکثر موارد هر دو روش نقاط یکسانی را درحکم نقاط جابه‌جا شده تشخیص می‌دادند. در این مورد هر دو روش، قابل اطمینان‌اند.

۳- در شبکه‌هایی که همهٔ نقاط آنها، یا تمام نقاط به‌جز یک نقطه و یا دو نقطه به‌صورت تصادفی جابه‌جا شده بودند، دیده شد که روش آزمون ثبات کلی اصلاً قادر به تشخیص کلی نقاط نیست. اما روش مینیموم‌سازی نرم L_1 با درصد قابل توجهی همهٔ نقاط را تشخیص می‌دهد. اما در حالتی که نقاط این شبکه‌ها به صورت قاعده‌مند جابه‌جا شده بودند (همه جابه‌جایی‌ها یک جهت داشتند)، هیچ‌کدام از این دو روش قادر به تشخیص کلی نقاط نبودند به‌طورکلی این دو روش موقعی نتایج قابل قبولی ارائه می‌دهند که حداقل دو

نقطه از نقاط شبکه ثابت مانده باشد. در غیر این‌صورت بهتر است از تانسورهای تغییر شکل استفاده شود.

۴- از نظر الگوریتم، روش مینیموم‌سازی نرم L_1 دارای الگوریتم بسیار ساده‌تری نسبت به روش آزمون ثبات کلی است و برنامه‌نویسی این الگوریتم بسیار ساده‌تر است. این مورد هم یکی دیگر از مزیت‌های این روش است.

در پایان پیشنهاد می‌شود که در تعیین نقاط پایدار و ناپایدار یک شبکه، از روش مینیموم‌سازی نرم L_1 استفاده شود که روش کاراتری است. البته بهتر است برای تشخیص نقاط پایدار و ناپایدار از هر دو روش استفاده شود و اجتماع نقاط پایدارحاصل از دو روش به مثابه نقاط پایدار در نظر گرفته شوند. در این حالت ضریب اطمینان بالاتری وجود دارد. پایداری نقاط ناپایداری که به اشتباه در این مرحله درحکم نقاط پایدار تشخیص داده شده‌اند با آزمونی که بعد از تعیین جابه‌جایی نقاط ناپایدار وجود دارد، رد می‌شود وبه مثابه نقاط ناپایدار شناخته می‌شوند.

تشکر و قدردانی

مؤلف برخود لازم می‌داند که از راهنمایی‌های ارزشمند آقای دکتر علیرضا امیری و همچنین همکاری شرکت ملی مناطق نفت‌خیز جنوب خصوصاً آقای مهندس بیگی‌نژاد رئیس محترم اداره نقشه‌برداری صمیمانه تشکر و قدردانی کند.

منابع

Amiri Seemkooei, A., 1998, Analytical methods in optimization and design of geodetic networks,dept. of Surveying Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran

Baarda, W., 1968, A testing procedure for use in geodetic networks. Publications on Geodesy, 2(5), Netherlands Geodetic Commission, Delft.

Baarda, W., 1967, Statistical concepts in Geodesy, Netherlands Geodetic Commision, Publication on Geodesy, New Series, Vol. 2, No. 4, Delft.

Baarda, W., 1973, S-transformations and criterion matrices. Publications on Geodesy, 5(1), Netherlands Geodetic Commission, Delft.

Cross, P. A., 1985, Numerical methods in network design. In: Grafarend EW, Sanso F (eds) Optimization and design of geodetic networks. Springer, Berlin Heidelberg New York, pp 429-435

Grafarend, E. W., 1974, Optimization of geodetic networks. Bolletino di Geodesia a science Affini, **33**(4), 351-406.

Grafarend, E. W., Kluesberg, A., and Schaffrin, B., 1980, An introduction to the variance-covariance component estimation of Helmert type. Zeitschrift fur Vermessungswesen, **105**, 161-180.

Kuang, S. L., 1991, Optimization and design of deformations monitoring schemes. Tech. Rep. No.

157, Dept. of Surveying Engineering., UNB, Frederiction, Canada.

Lerch, F. J., 1991, Optimum data weighting and error calibration estimation of gravitational parameters. Bulletin Geodesique, **65**, 44-51.

Mahab Godss Engineering Company. 19996, The first epoch of Alavian dam monitoring network observations. 92, Payvandi, Kargozar, shahid dastjerdi St., Tehran, Iran.

Uotiala, U. A., 1967, Introduction to adjustment computations with matrices. Lecture Notes, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.

Vanicek, p., and Wells, D. E., (1972). Least squares approximation and related topics. Department of Surveying Engineering lecture notes No. 22, The University of New Brunswick, Fredericton.

Vanicek, P., Krakiwsky, E. J., Craymer, M. R, Gao, Y., and ong, P. S., 1990, Robustness analysis. Tech. Rep. No. 156, Dept. of Surveying Engineering, UNB, Fredericton, Canada.

Wells, D. E., and Krakiwsky, E. J., 1971, The method of least squares. Department of Surveying Engineering Lecture Notes No. 18, University of New Brunswick, Fredericton.